

**МОДУЛЬ № 2**  
**«ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**  
**И АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА»**  
**ЛЕКЦИЯ № 5**  
**ОСНОВНОЙ ЗАКОН ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

**План лекции:**

1. Момент силы .....	2
1.1. Момент силы относительно точки .....	2
1.2. Момент силы относительно оси .....	3
2. Момент импульса .....	3
2.1. Момент импульса относительно точки .....	3
2.2. Момент импульса относительно оси .....	4
3. Основное уравнение динамики вращательного движения .....	4
3.1. Основное уравнение динамики вращательного движения в частной форме .....	4
3.2. Основное уравнение динамики вращательного движения в обобщённой форме .....	5

# 1. Момент силы

## 1.1. Момент силы относительно точки

Момент силы<sup>1</sup> относительно неподвижной точки (центра),  $\vec{M}$  – векторная физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора, проведённого из центра в точку приложения силы, на силу (см. рис. 1).

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

Единица измерения – ньютон-метр.

$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

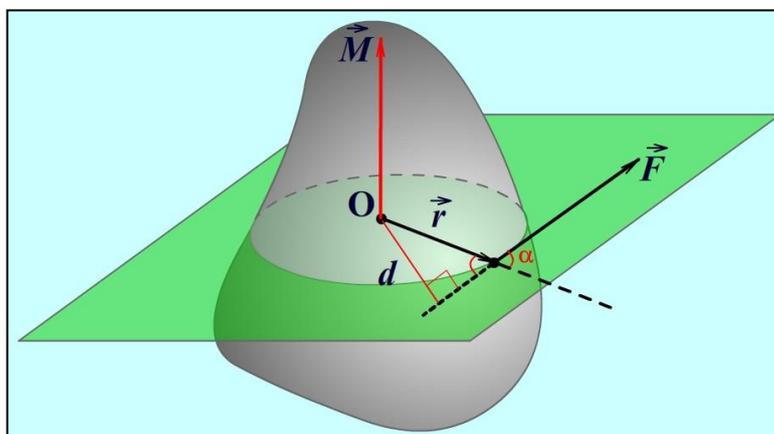


Рис. 1. К пояснению момента силы относительно центра

$\vec{M}$  – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{r}$  к  $\vec{F}$  (правило буравчика).

**Модуль вектора момента силы** как модуль векторного произведения:

$$M = Fr \sin \alpha.$$

Заметим, что  $r \sin \alpha = d$  (см. рис. 1), поэтому модуль момента силы перепишем в виде:

$$M = Fd,$$

где  $d$  – **плечо силы**  $\vec{F}$  относительно центра O.

---

<sup>1</sup> Является аналогом силы.

Так как при отыскании плеча силы часто делаются ошибки, целесообразно каждый раз строго следовать следующему порядку действий:

- 1) провести линию действия силы;
- 2) найти кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы (т. е. опустить перпендикуляр из центра на линию действия силы).

## 1.2. Момент силы относительно оси

**Момент силы относительно неподвижной оси**,  $M_z$  – скалярная физическая величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы, определённого относительно произвольной точки данной оси (значение момента  $M_z$  не зависит от выбора положения точки  $O$  на оси) – см. рис. 2.

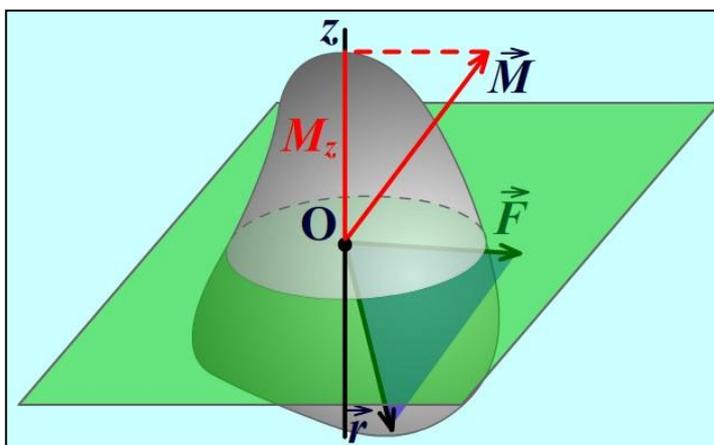


Рис. 2. К пояснению момента силы относительно оси

Если ось  $z$  будет совпадать с направлением вектора  $\vec{M}$ , то момент силы будет представляться вектором, совпадающим с осью:

$$\vec{M}_z = [\vec{r} \times \vec{F}]_z.$$

## 2. Момент импульса

### 2.1. Момент импульса относительно точки

**Момент импульса (момент количества движения) материальной точки относительно неподвижной точки (центра)**,  $\vec{L}$  – векторная физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times m\vec{v}].$$

Единица измерения – килограмм-метр квадратный на секунду.

$$[L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

$\vec{L}$  – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{r}$  к  $\vec{p}$  (правило буравчика).

**Модуль вектора момента импульса:**

$$L = rp \sin \alpha = m \omega r \sin \alpha = m \omega d_p,$$

где  $d_p$  – плечо вектора  $\vec{p}$  относительно центра.

## 2.2. Момент импульса относительно оси

**Момент импульса материальной точки относительно неподвижной оси,**  $L_z$  – скалярная физическая величина, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки данной оси.

**Момент импульса твёрдого тела** относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных его частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i (\omega r)_i r_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega.$$

Таким образом, момент импульса твёрдого тела относительно оси – это произведение момента инерции тела относительно той же самой оси и его угловой скорости.

## 3. Основное уравнение динамики вращательного движения<sup>2</sup>

### 3.1. Основное уравнение динамики вращательного движения

**в частной форме**

Имеет вид

$$\varepsilon = \frac{M_z}{J_z}.$$

---

<sup>2</sup> Аналог второго закона Ньютона.

В случае совпадения оси с главной осью инерции можно записать:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J},$$

т. е. угловое ускорение, приобретаемое телом, пропорционально вызывающему его моменту сил, совпадает с ним по направлению и обратно пропорционально моменту инерции тела.

### **3.2. Основное уравнение динамики вращательного движения в обобщённой форме**

Имеет вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Или в векторном виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

т. е. скорость изменения момента импульса тела равна действующему на него моменту сил.