МОДУЛЬ № 3
«ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ»
ЛЕКЦИЯ № 1
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

План лекции:

1. Закон сохранения импульса

Механическая система – рассматриваемая совокупность материальных точек (тел).

Внутренние силы – силы взаимодействия между материальными точками данной механической системы.

Внешние силы – силы, с которыми на материальные точки данной системы действуют внешние тела.

Замкнутая (изолированная) система тел – система тел, на которые не действуют внешние силы (систему можно условно считать замкнутой, если действие всех внешних сил взаимно скомпенсировано или пренебрежимо мало).

По третьему закону Ньютона каждой внутренней силе найдётся ей противоположная, поэтому геометрическая сумма внутренних сил системы равна нулю.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел есть величина постоянная.

Под импульсом системы подразумевается геометрическая сумма импульсом всех тел системы.

Итак,

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \text{const}.$$

Проекции импульса замкнутой системы на оси также остаются постоянными, т. е. можно записать:

$$p_x = \text{const},\ p_y = \text{const},\ p_z = \text{const}.$$

Также возможна и следующая запись закона, говорящая о том, что геометрическая сумма импульсов тел замкнутой системы до взаимодействия равна геометрической сумме импульсов тел после взаимодействия.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' + ... + \vec{p}_n'.$$

Укажем также часто встречающуюся в школе запись закона применительно к замкнутой системе из двух тел с неизменной массой:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2',$$

т. е. скорости тел могут меняться, но таким образом, чтобы векторная сумма импульсов оставалась прежней.

Получим формулу, выражающую закон сохранения импульса.

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела системы с учётом внутренних и внешних сил:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right) = \vec{F}_1' + \vec{F}_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right) = \vec{F}_2' + \vec{F}_2,$$

$$\dots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_n\vec{\upsilon}_n\right) = \vec{F}_n' + \vec{F}_n.$$

Внутренние силы штрихованы.

Почленно сложим эти уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \dots + m_n\vec{\upsilon}_n\right) = \left(\vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_n'\right) + \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n\right).$$

Согласно третьему закону Ньютона для внутренних сил имеем:

$$\vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_n' = 0.$$

Т. е. первая сумма в скобках справа равна нулю.

Если система замкнутая, то сумма внешних сил также равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0.$$

Тогда, учитывая, что импульс системы – это геометрическая сумма импульсов тел системы,

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \dots + m_n\vec{\upsilon}_n,$$

имеем равенство нулю первой производной от импульса системы по времени

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Значит, сам импульс с течением времени остаётся неизменной величиной (как по модулю, так и по направлению)

$$\vec{p} = \text{const}.$$

Закон сохранения импульса – фундаментальный закон природы, являющийся следствием **однородности пространства**, которая заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого её физические свойства и законы движения не зависят от выбора положения начала координат ИСО.

Закон сохранения импульса неприменим:

– к незамкнутым системам (хотя закон может по-прежнему применяться к отдельным проекциям импульса системы на те оси, вдоль которых внешние силы не действуют, или их действия взаимно скомпенсировано, или пренебрежимо малы);

– при выборе неинерциальной системы отсчёта.

2. Центр масс

Центр масс системы материальных точек – воображаемая точка C, положение которой характеризует распределение массы этой системы и имеющая радиус-вектор:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}.$$

Взяв первую производную от радиус-вектора центра масс, несложно получить выражение для **скорости центра масс**:

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{m}.$$

Заметим, что величина в числителе – это ничто иное как **импульс системы**. И тогда

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{\vec{p}}{m}.$$

Таким образом, импульс системы можно представить как произведение массы всей системы и скорости её центра масс:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_C .$$

Если система незамкнута, то, взяв производную по времени от обеих частей данного уравнения, мы придём к закону движения центра масс.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_C}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n .$$

Т. е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе.

Если система замкнута, то центр масс замкнутой системы либо неподвижен, либо движется прямолинейно равномерно.

3. Закон сохранения момента импульса

Закон сохранения момента импульса формулируется аналогично закону сохранения импульса: момент импульса замкнутой системы тел есть величина постоянная.

$$\vec{L} = \mathrm{const} .$$

Кратко покажем справедливость этой формулы.

Согласно основному закону вращательного движения в обобщённой форме:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} .$$

Для замкнутой системы момент внешних сил равен нулю, поэтому

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$\vec{L} = \mathrm{const} .$$

Закон сохранения момента импульса является следствием такого свойства симметрии пространства, как его **изотропность** (неизменность физических законов относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Для тела с изменяемым моментом инерции:

$$J\vec{\omega} = J'\vec{\omega}'.$$

Это подтверждается, например, в опытах со скамьёй Жуковского.

4. Свободные оси. Гироскоп

Свободные оси (**оси свободного вращения**) **тел** – оси вращения тел, которые не изменяют своей ориентации в пространстве без действия на них внешних сил.

В любом теле существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями (они называются **главными осями инерции тела**).

Например, главные оси инерции однородного прямоугольного параллелепипеда проходят через центры противоположных граней, для однородного цилиндра одной из главных осей инерции является его геометрическая ось, а в качестве остальных осей могут быть две любые взаимно перпендикулярные оси, проведённые через центр масс в плоскости, перпендикулярной геометрической оси цилиндра.

Из опыта известно, что вращение устойчиво вокруг главных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции (см. рис. 1).

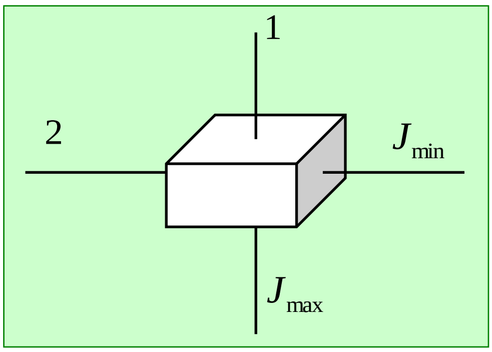

Рис. 1. К пояснению устойчивого вращения тела

Свойство свободных осей сохранять своё положение в пространстве применяется в **гироскопах**[1] – массивных однородных телах, вращающихся с большой угловой скоростью вдоль своей оси симметрии, являющейся свободной осью.

[1] Гироскоп (от греч. gyros – круг, gyreuo – кружусь, вращаюсь и skopeo – смотрю).

Рассмотрим одну из разновидностей гироскопов – **гироскоп в кардановом подвесе**.

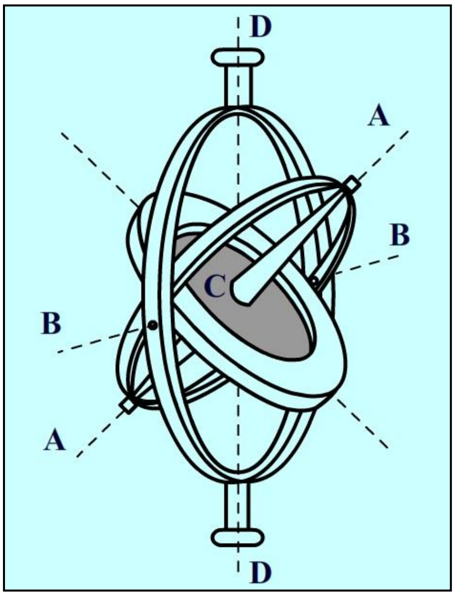

Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Чтобы ось гироскопа изменила своё направление в пространстве, необходимо отличие от нуля момента внешних сил. Если момент внешних сил, приложенных к вращающемуся гироскопу относительно его центра масс, отличен от нуля, то наблюдается явление, получившее название **гироскопического эффекта**.

Суть гироскопического эффекта: под действием пары сил, приложенной к оси вращающегося гироскопа, его ось поворачивается вокруг прямой O_3O_3, а не вокруг прямой O_2O_2, как это кажется естественным на первый взгляд (см. рис. 3).

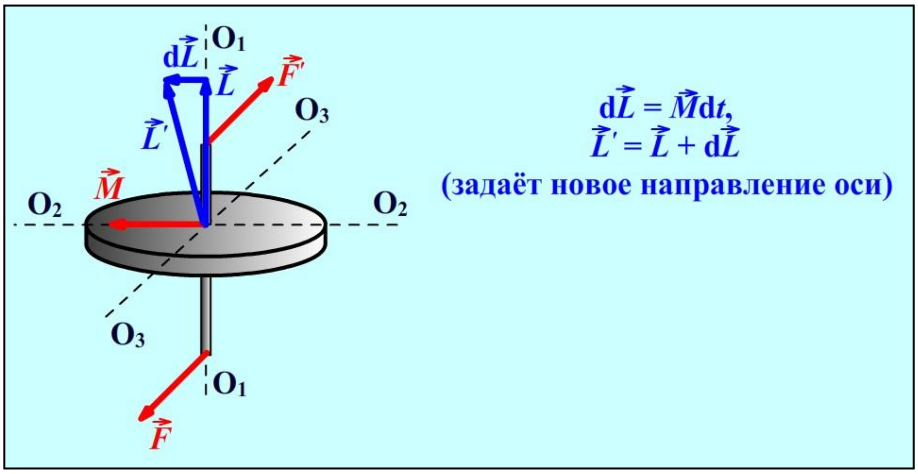

Рис. 3. К пояснению гироскопического эффекта

Гироскопический эффект объясняется следующим образом. Момент $\vec{M}$ пары сил $\vec{F}$ направлен вдоль прямой O_2O_2. За время $\mathrm{d}t$ момент импульса $\vec{L}$ гироскопа получит приращение $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\mathrm{d}t$ (направление $\mathrm{d}\vec{L}$ совпадает с направлением $\vec{M}$) и станет равным $\vec{L}' = \vec{L} + \mathrm{d}\vec{L}$. Направление вектора $\vec{L}'$ совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось вращения гироскопа повернётся вокруг прямой O_3O_3. Если время действия силы мало, то, хотя момент сил $\vec{M}$ и велик, изменение момента импульса $\mathrm{d}\vec{L}$ гироскопа будет также весьма малым. Поэтому кратковременное действие сил практически не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве.