МОДУЛЬ № 4 «МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

ЛЕКЦИЯ № 2

СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

План лекции:

1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты 2

2. Биения 4

3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу 5

1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

На практике нередко приходится описывать поведение тела, принимающего участие сразу в нескольких колебательных движениях, поэтому важно уметь находить результат их сложения.

Сначала научимся складывать гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты.

Результат такого сложения гармонических колебаний, происходящих в направлении оси x с одной и той же циклической частотой ω_0 и описываемых представленными уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_1\right), \\ x_2 = A_2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_2\right), \end{cases}$$

указан ниже

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right).$$

Т.о есть результирующее колебание происходит в том же направлении и с той же частотой.

Амплитуда A и начальная фаза φ результирующего колебания будут определяться согласно следующим выражениям:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Докажем справедливость заявленных аналитических соотношений.

Пусть два гармонических колебания происходят согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_1\right), \\ x_2 = A_2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_2\right). \end{cases}$$

Для сложения колебаний воспользуемся **методом вращающегося вектора амплитуды** (см. рис. 1).

Отложим вектор $\vec{A}_1$, по модулю равный амплитуде A_1, от точки О оси x под углом, равным начальной фазе φ_1, а затем заставим его вращаться с угловой скорость $\vec{\omega}_0$ против хода часовой стрелки. Проекция конца вектора колеблется вдоль оси x согласно представленному уравнению в пределах от $-A_1$ до $+A_1$.

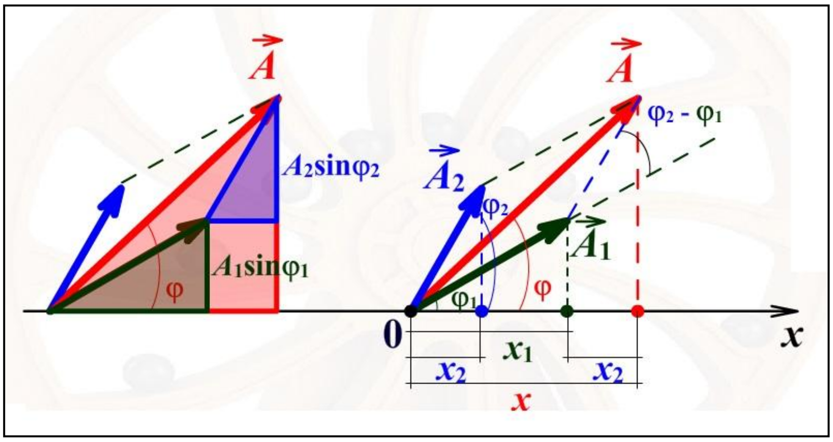

Рис. 1. К пояснению сложения гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Т. к. векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью $\vec{\omega}_0$, то разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остаётся постоянной, поэтому результирующее колебание будет иметь вид:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

(по теореме косинусов; см. рис. 1),

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

(см. рис. 1).

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ складываемых колебаний.

1) Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi, m = 0,1,2,\ldots$, тогда $A = A_1 + A_2$.

2) Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi, m = 0,1,2,\ldots$, тогда $A = |A_1 - A_2|$.

2. Биения

Особый интерес на практике представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В этом случае получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой – биения.

Биения – периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

Пусть два гармонических колебания с одинаковыми амплитудами и мало отличающимися частотами ($\Delta\omega << \omega_0$) происходят в одном направлении согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_0 t, \\ x_2 = A\cos(\omega_0 + \Delta\omega)t. \end{cases}$$

Сложение в данном случае нетрудно выполнить, опираясь на формулы тригонометрии.

Согласно формуле для суммы косинусов

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

имеем

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\cos\frac{(2\omega_0 + \Delta\omega)t}{2}.$$

Применяя почленное деление и расставляя акцентирующие скобки, можно записать

$$x = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]\cos\left(\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right).$$

Если учесть, что $\omega_0 >> \dfrac{\Delta\omega}{2}$, то получим

$$x = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]\cos(\omega_0 t).$$

Делаем вывод, что результирующие колебания можно рассматривать как гармонические с частотой ω_0 и периодически изменяющейся амплитудой:

$$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|.$$

При этом период биений находим, разделив 2π на коэффициент при *t*, т. е. на $\frac{\Delta\omega}{2}$, а затем уменьшив результат в 2 раза, т. к. косинус берётся по модулю:

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

Очевидно, что частота биений при этом

$$\omega_б = \Delta\omega.$$

Проиллюстрируем полученные результаты графически.

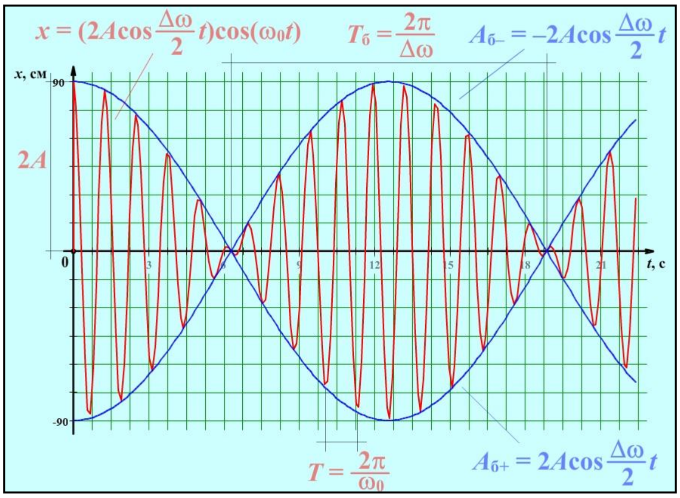

Рис. 2. К пояснению биений

3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Переходим к сложению взаимно перпендикулярных колебаний, фигурам Лиссажу.

Фигуры Лиссажу – замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, одновременно совершающей два взаимно перпендикулярных колебания.

Так, например, если точка одновременно совершает два гармонических колебания одинаковой частоты во взаимно перпендикулярных направлениях согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x = A\cos\omega_0 t, \\ y = B\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \end{cases}$$

то результирующей траекторией будет эллипс с произвольно ориентированными осями:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0 .$$

Покажем справедливость данного уравнения.

Сложим два гармонических колебания одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях (для простоты начало отсчёта времени выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю):

$$\begin{cases} x = A\cos\omega_0 t, \\ y = B\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \end{cases}$$

Исключим из уравнений время *t*:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A} = \cos\omega_0 t, \\ \dfrac{y}{B} = \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \end{cases}$$

Преобразуем правую часть второго уравнения согласно тригонометрической формуле косинуса суммы

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta ,$$

$$\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \cos\omega_0 t\cos\varphi_0 - \sin\omega_0 t\sin\varphi_0 .$$

Так как

$$\cos\omega_0 t = \frac{x}{A},$$

то с учётом основного тригонометрического тождества

$$\sin\omega_0 t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\ .$$

Далее выполняем подстановку и преобразования, представленные на экране

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\varphi_0 - \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\,\sin\varphi_0\,,$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\,\sin\varphi_0 = \frac{x}{A}\cos\varphi_0 - \frac{y}{B}\,,$$

$$\left(1-\left(\frac{x}{A}\right)^2\right)\sin^2\varphi_0 = \left(\frac{x}{A}\right)^2\cos^2\varphi_0 - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi_0 + \left(\frac{y}{B}\right)^2,$$

И приходим к следующему результату:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0\,.$$

Это – **уравнение эллипса с произвольно ориентированными осями**. Соответствующие этому уравнению колебания **называются эллиптически поляризованными**.

Частные случаи

1) $\varphi_0 = m\pi$ ($m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

В данном случае эллипс вырождается в отрезок прямой.

$$\frac{x^2}{A^2} \mp 2\frac{xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0\,,$$

$$\left(\frac{x}{A} \mp \frac{y}{B}\right)^2 = 0\,,$$

$$\frac{x}{A} = \pm\frac{y}{B},$$

$$y = \pm\frac{B}{A}x\,.$$

Знак «+» соответствует чётным значениям m, а знак «–» – нечётным.

2) $\varphi_0 = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ ($m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

В данном случае получается эллипс, оси которого совпадают с осями координат.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то траектория результирующего колебания является сложной (см. анимационную модель в видеолекции).