МОДУЛЬ № 4 «МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

ЛЕКЦИЯ № 1

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. МАЯТНИКИ

План лекции:

1. Колебания, их виды

Колебания – движения (процессы), которые характеризуются определённой повторяемостью во времени.

Можно встретить различные классификации колебаний. Мы рассмотрим три классификационные модели.

По физической природе различают: **механические колебания** и **электромагнитные**.

Далее подробно будем говорить лишь о колебаниях механических величин. Колебания электрических и магнитных характеристик будут рассматриваться отдельно.

Следующая классификация колебаний – по характеру энергетических потерь. Различают **затухающие** и **незатухающие колебания**. Из практики мы знаем, что если вывести из положения равновесия пружинный маятник, то вследствие действия сил трения, в частности, сопротивления воздуха, через некоторое время он остановится. Если прибегнуть к идеализации и пренебречь потерей энергии, или, что ближе к реальности, восполнять потери энергии, то колебания будут продолжаться бесконечно долго с одной и той же амплитудой.

Определения затухающих и незатухающих колебаний вполне очевидны и могут формулироваться так.

Затухающие колебания – колебания, которые затухают с течением времени вследствие энергетических потерь колебательной системой (например, вследствие действия сил трения).

Незатухающие колебания – колебания, которые не затухают с течением времени вследствие пополнения энергией колебательной системы (или при отсутствии энергетических потерь в идеализированном случае).

Переходим к третьей классификации колебаний – по характеру возбуждения. Различают **собственные** (их ещё называют **свободными)**, **вынужденные** и **автоколебания**.

Собственные колебания – колебания, которые совершаются в колебательной системе за счёт первоначально сообщённой ей энергии и при последующем отсутствии внешних воздействий на неё (например, колебания качелей после однократного отклонения).

Вынужденные механические колебания – колебания, которые совершаются в колебательной системе за счёт действия внешней периодически изменяющейся силы (например, колебания качелей вследствие многократных периодических подталкиваний).

Автоколебания – колебания, которые поддерживаются незатухающими в реальной диссипативной колебательной системе за счёт согласованного управления ей активным элементом, восполняющим неизбежные потери энергии (например, колебания в механических часах с храповым механизмом).

2. Гармонические колебания.
Уравнения гармонических колебаний

Гармонические колебания – колебания, при которых колеблющаяся величина (в механике это, например, координата, скорость, ускорение) изменяется со временем по закону косинуса или синуса.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0 \text{ или } \ddot{x}=-\omega_0^2 x,$$

где x – значение колеблющейся величины (например, координаты колеблющегося на пружине груза), $\ddot{x}$ – её вторая производная по времени, ω_0 – собственная циклическая частота.

Обратим внимание на вторую запись уравнения, из которой следует, что если вторая производная величины по времени пропорциональна самой величине, взятой со знаком минус, то данная величина колеблется по гармоническому закону.

Система, совершающая колебания, описываемые дифференциальным уравнением такого вида, называется **гармоническим осциллятором** (таковыми, являются, например, пружинный и математический маятники).

Придём к дифференциальному уравнению гармонических колебаний на примере пружинного маятника.

Пусть груз совершает собственные незатухающие колебания вдоль горизонтальной прямой (см. рис. 1).

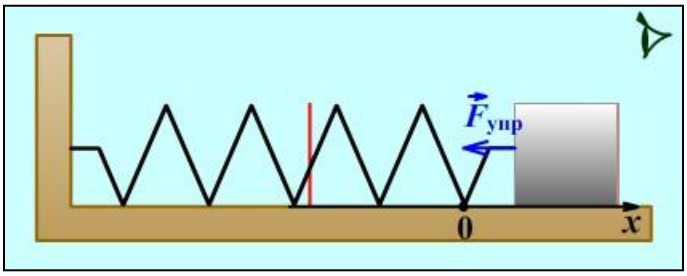

Рис. 1. К выводу дифференциального уравнения гармонических колебаний

В идеализированной модели предполагается, что кроме силы упругости на груз в горизонтальном направлении никакие силы больше не действуют. В крайнем правом положении сила упругости, действующая на груз, максимальна и направлена влево, к положению равновесия.

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F}_{упр} = m\vec{a}.$$

Здесь и далее очевидно понятные по обозначениям величины не поясняются.

Если учесть закон Гука и определение мгновенного ускорения, то в проекциях на ось x можно записать:

$$-kx = m\ddot{x}.$$

Или

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Поделив обе части уравнения на массу, получим

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Введём обозначение

$$\frac{k}{m}=\omega_0^2,$$

запишем дифференциальное уравнение в окончательном виде

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0.$$

Получим решение данного дифференциального уравнения.

$$x=A\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right),$$

где x – значение колеблющейся величины (например, координаты груза пружинного маятника), t – время.

A (или также можно встретить обозначения $x_{\max}$, x_m, и даже x_0, хотя последнее считается менее удачным) – это амплитуда колебаний.

Амплитуда колебаний – это максимальное значение колеблющейся величины.

Выражение, стоящее под знаком косинуса (или синуса, к которому можно перейти по формулам приведения), называется **фазой колебаний**.

$$\varphi=\omega_0 t+\varphi_0.$$

Она определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени t.

φ_0 – **начальная фаза колебаний**.

То есть фаза колебаний в начальный момент времени $t=0$.

ω_0 – **собственная циклическая частота колебаний** (её также называют ещё и круговой) – это число колебаний за 2π с.

Она связана с периодом и частотой колебаний известными соотношениями:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu.$$

Период колебаний, T – время одного полного колебания.

Частота колебаний, ν – число колебаний, совершаемых за единицу времени.

Получим заявленный результат решения дифференциального уравнения гармонических колебаний.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0.$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид:

$$l^2+\omega_0^2=0.$$

Оно имеет два комплексно сопряжённых корня:

$l_{1,2}=\pm i\omega_0$, где $i^2=-1$, i – мнимая единица.

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения

$$(\, y=C_1 e^{\alpha x}\cos\omega_0 t+C_2 e^{\alpha x}\sin\omega_0 t\,),$$

примет вид:

$$x=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t.$$

Найдём константы $C_{1,2}$, исходя из начальных условий (полагаем, что в начальный момент времени груз максимально отклонён от положения равновесия, а его скорость равна нулю).

Таким образом, если $x(0)=A$, то $A=C_1$.

Если скорость, точнее её проекция на ось x, $\upsilon_0=\dot{x}(0)=0$, то и $C_2=0$. В этом легко убедиться самостоятельно, взяв первую производную от x по времени и подставив соответствующие значения величин.

Учитывая результаты для C_1 и C_2, получим:

$$x=A\cos\omega_0 t.$$

При не равной нулю начальной фазе:

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0).$$

Графическая иллюстрация полученного решения приведена на рис. 2.

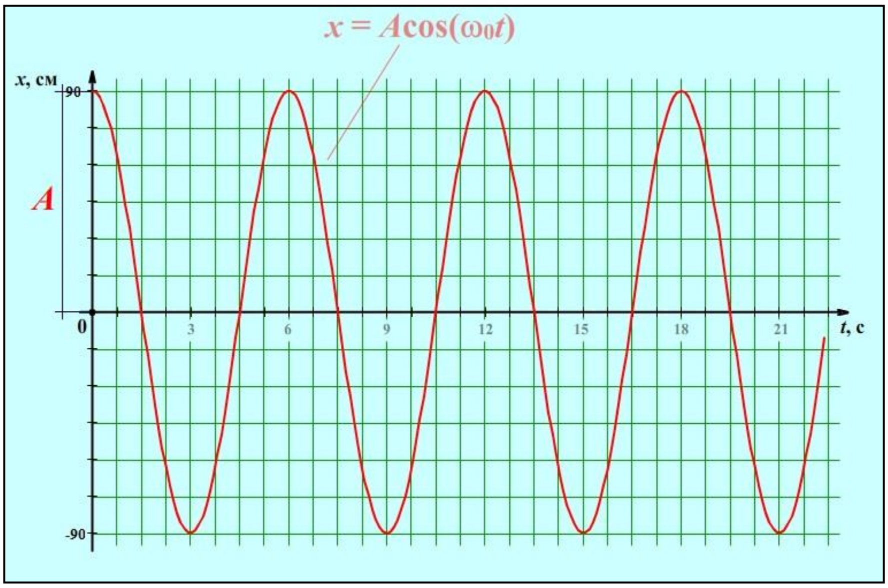

Рис. 2. График гармонических колебаний

При гармонических колебаниях координаты груза другие кинематические величины, такие как скорость, ускорение, также испытывают гармонические колебания.

Для того чтобы найти кинематическое уравнение для скорости, точнее – её проекции на ось x, возьмём первую производную от координаты по времени:

$$\upsilon = \upsilon_x = \dot{x}.$$

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Обозначим $A\omega_0$ через $\upsilon_{\max}$ (амплитуду скорости) и воспользуемся формулой приведения, тогда предыдущее выражение примет вид:

$$\upsilon = \upsilon_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

то есть скорость опережает по фазе колебания координаты на $\frac{\pi}{2}$.

Найдём аналитическое выражение для ускорения, точнее – его проекции.

Возьмём производную от скорости:

$$a = a_x = \dot{\upsilon}_x = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Или

$$a = a_{\max}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right), \text{ где } a_{\max} = \omega_0^2 A,$$

то есть ускорение опережает по фазе колебания координаты уже на π.

Выражение для силы, действующей на колеблющееся тело, легко записать на основании второго закона Ньютона в частной форме, домножив ускорение на массу:

$$F = F_x = ma_x = -m\omega_0^2 A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

В этом соотношении можно заметить выражение для координаты и свернуть его.

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

То есть сила пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (то есть к положению равновесия).

Учитывая, что кинетическая энергия (мы пользуемся обозначением *T*), определяется как $\frac{m\upsilon^2}{2}$, несложно записать её зависимость от времени при гармонических колебаниях, подставим вместо скорости ранее полученное для неё выражение:

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Потенциальную энергию П определим, зная силу, как интеграл от $F_x \mathrm{d}x$ в пределах от нуля до *x* со знаком минус.

$$\Pi = -\int_0^x F_x \mathrm{d}x = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Заметим, что период изменения энергий при гармонических колебаниях в два раза меньше, чем у координаты, скорости, ускорения, силы, так как тригонометрические функции входят в выражения во второй степени. Следовательно, колебания кинетической и потенциальной энергий имеют в 2 раза большую частоту. Кроме того, когда кинетическая энергия достигает максимального значения, потенциальная обращается в нуль, и наоборот.

Выражение для полной энергии несложно получить самостоятельно, сложив кинетическую и потенциальную и применив основное тригонометрическое тождество.

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Отсюда делаем вывод о том, что полная механическая энергия при гармонических колебаниях остаётся постоянной, то есть для гармонических колебаний выполняется закон сохранения механической энергии.

Ниже приведены графики зависимости различных величин от времени при гармонических колебаниях.

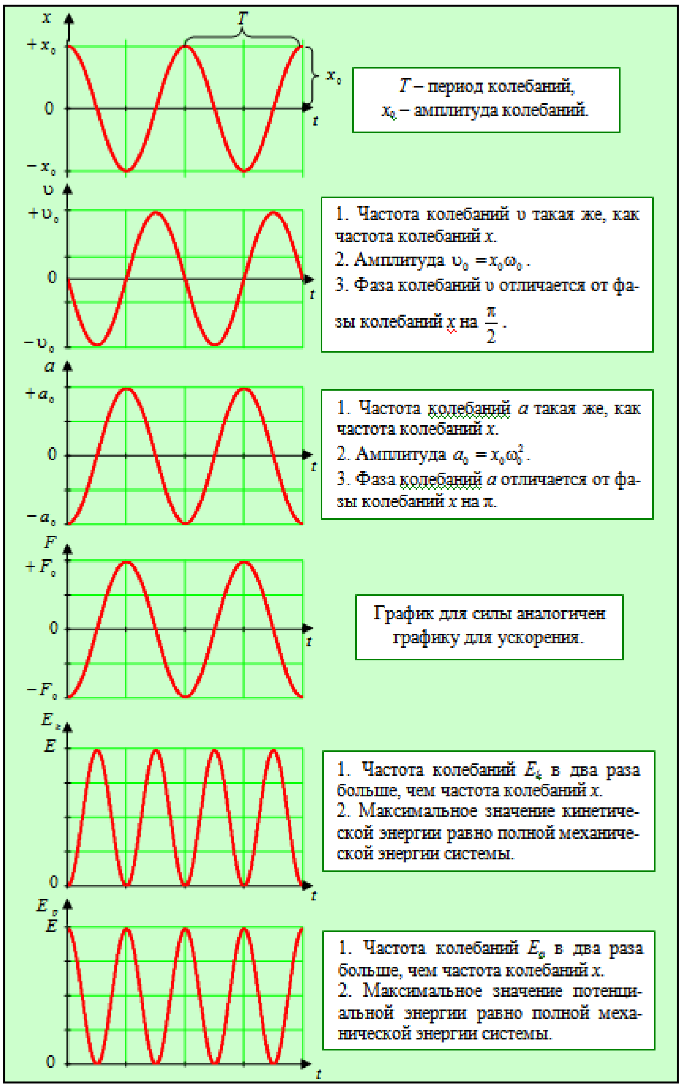

Рис. 3. К пояснению гармонических колебаний

3. Пружинный, математический и физический маятники

Пружинный маятник – это система, состоящая из груза массой *m*, скреплённого с абсолютно упругой пружиной жёсткостью *k*.

Колебания совершаются за счёт силы упругости.

Уравнение движения пружинного маятника:

$$-kx = m\ddot{x},\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Циклическая частота колебаний пружинного маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Период колебаний пружинного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Данная формула справедлива для упругих колебаний в пределах выполнения закона Гука.

Математический (нитяной) маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой *m*, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити.

На практике хорошим приближением математического маятника является тяжёлый шарик небольших размеров, подвешенный на тонкой длинной нити.

Колебания совершаются за счёт силы тяжести.

Уравнение движения математического маятника несложно записать, воспользовавшись поясняющим рисунком (см. рис. 4), где предполагается малый угол отклонения маятника от вертикали:

$$-mg\sin\alpha = m\ddot{x},\ \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0.$$

Циклическая частота колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

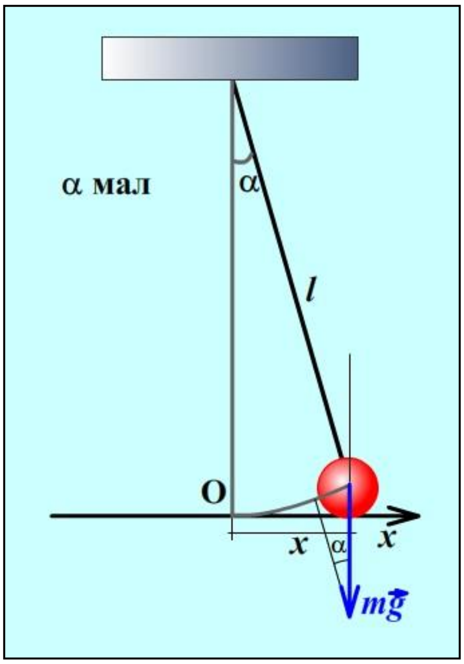

Рис. 4. Математический маятник

Период колебаний математического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Формула справедлива для малых колебаний. При наличии других полей, помимо поля тяготения Земли, действующих на шарик, период колебаний может меняться.

Физический маятник – это система, представляющая собой твёрдое тело, закреплённое на неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку, не совпадающую с центром масс тела.

Колебания совершаются за счёт силы тяжести.

Уравнение движения физического маятника:

$$-mgl\sin\alpha = J\ddot{\alpha},\ \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0 \text{ (см. рис. 5).}$$

Циклическая частота колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

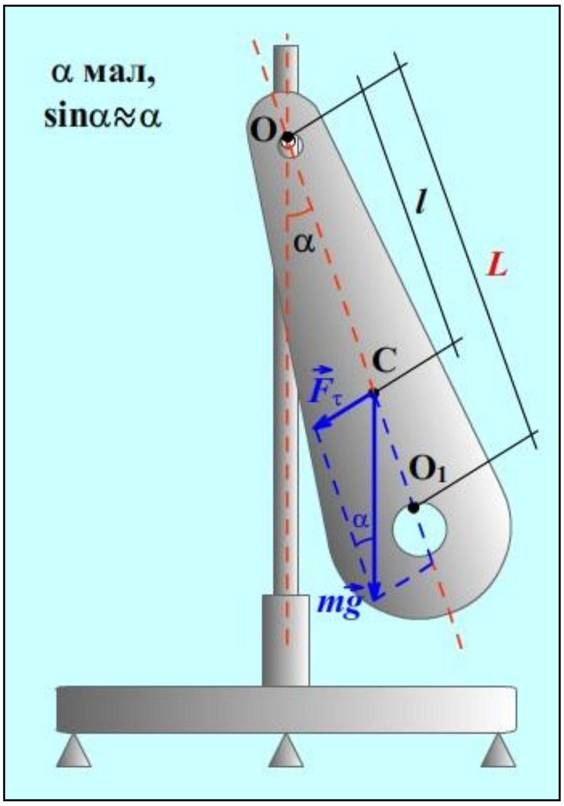

Рис. 4. Физический маятник

Период колебаний физического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\,.$$

Приведённая длина физического маятника.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,,\ \text{где}\ L = \frac{J}{ml}\,.$$

Приведённая длина физического маятника, L – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Центр качаний физического маятника – такая точка на прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс маятника, которая отстоит от точки подвеса на расстоянии приведённой длины.

Центр качаний и точка подвеса обладают **свойством взаимозаменяемости**.