МОДУЛЬ № 2
«ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА»
ЛЕКЦИЯ № 4
МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

План лекции:

1. Момент инерции

1.1. Момент инерции материальной точки

Момент инерции материальной точки относительно оси, J – скалярная физическая величина, равная произведению массы материальной точки и квадрата расстояния между материальной точкой и осью (см. рис. 1).

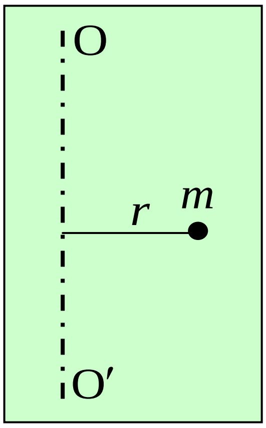

Рис. 1. Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2.$$

$$[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

1.2. Момент инерции системы материальных точек

Момент инерции – величина аддитивная, и **момент инерции системы материальных точек относительно данной оси** представляет собой сумму произведений масс материальных точек на квадраты соответствующих расстояний от материальных точек до данной оси.

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2.$$

1.3. Момент инерции тела

Момент инерции тела относительно данной оси при непрерывном распределении массы в общем случае вычисляется через интеграл, т. е. мысленно разбиваем тело на дифференциально малые элементы, применяем для них формулу момента инерции как для материальной точки, а затем «непрерывно суммируем».

Цифрами в скобках формально обозначены нижний и верхний пределы интегрирования, которые будут ясны из условий конкретной задачи.

$$J = \int\limits_{(1)}^{(2)} r^2 \mathrm{d}m.$$

Рассмотрим часто встречающиеся случаи.

1) Непрерывное распределение массы вдоль линии с постоянной линейной плотностью:

$$J = \chi \int\limits_{(L)} r^2 \mathrm{d}l,$$

где $\chi = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l}$ – **линейная плотность** (скалярная физическая величина, определяемая массой единицы длины линии, вдоль которой распределена масса, $[\chi] = \dfrac{\text{кг}}{\text{м}}$).

2) Непрерывное распределение массы по поверхности с постоянной поверхностной плотностью:

$$J = \sigma \int\limits_{(S)} r^2 \mathrm{d}s,$$

где $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}$ – **поверхностная плотность** (скалярная физическая величина, определяемая массой единицы площади поверхности, вдоль которой распределена масса, $[\sigma] = \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^2}$).

3) Непрерывное распределение массы по объёму тела с постоянной объёмной плотностью:

$$J = \rho \int\limits_{(V)} r^2 \mathrm{dv},$$

$\rho = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{dv}}$ – **объёмная плотность** (скалярная физическая величина, определяемая массой единицы объёма тела, по которому распределена масса, $[\rho] = \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$).

1.4. Моменты инерции некоторых однородных тел

Выведем формулы для моментов инерции некоторых однородных тел.

Начнём с момента инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину.

$$J = \frac{ml^2}{12}.$$

Делаем рисунок.

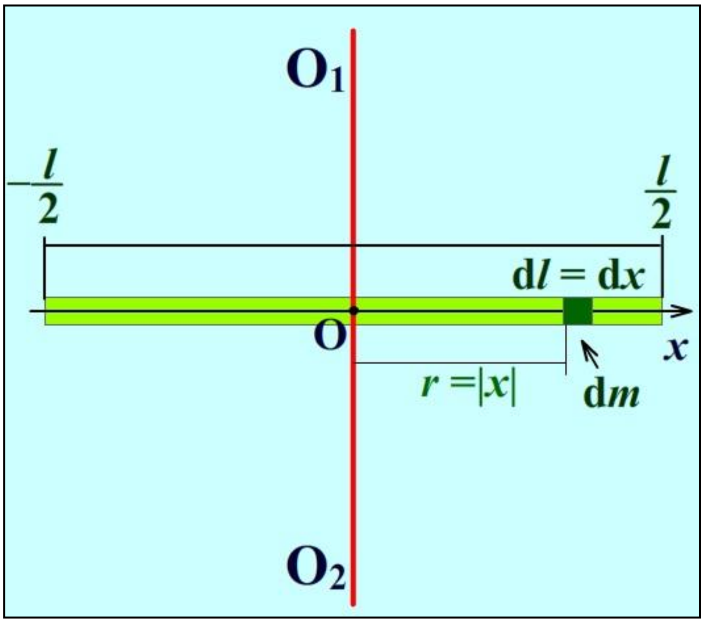

Рис. 2. В выводу формулы для момент инерции стержня
(ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину)

Ось x направим вдоль стержня вправо. Разобьём стержень на дифференциально малые элементы длиной dl или что то же самое dx. Один из них выделим. Этот элемент, который можно считать материальной точкой, имеет массу dm. Он расположен на расстоянии r, совпадающем по модулю в общем случае с координатой x, которая может меняться в пределах от $-\frac{l}{2}$ до $+\frac{l}{2}$. Согласно определению линейной плотности легко выразить массу dm как $\chi \mathrm{d}l$ или $\chi \mathrm{d}x$. Т. к. подразумевается, что масса распределена равномерно, то линейную плотность можно выразить через общую массу и длину стержня. Записываем выражение для момента инерции дифференциально малого участка: $\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m$. Подставляем рассмотренные ранее величины и интегрируем в пределах от $-\dfrac{l}{2}$ до $+\dfrac{l}{2}$.

$$J = \frac{m}{l}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}.$$

(Для удобства в виду чётности подынтегральной функции и симметричности пределов нижний предел заменили на 0, а интеграл удвоили).

Получим формулу для момента инерции диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр.

$$J = \frac{mR^2}{2}.$$

Делаем рисунок.

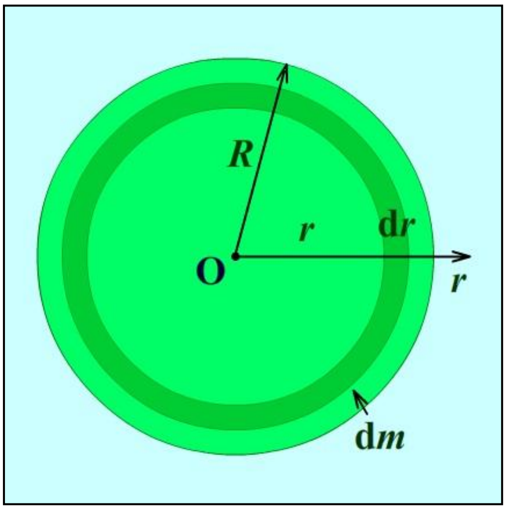

Рис. 3. В выводу формулы для момент инерции диска
(ось перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр)

Разрежем диск на тонкие кольца. Масса одного кольца – dm. Т. к. все элементы кольца расположены на одном и том же расстоянии от оси, то формула для вычисления его момента инерции будет совпадать с формулой для момента инерции материальной точки.

Покажем радиальную ось Or, толщину кольца радиуса r обозначим как dr. Массу кольца легко вычислить через поверхностную плотность, учтя, что $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$. Поверхностную плотность выразим через общую массу и площадь диска (предполагается, что масса распределена равномерно). Как уже было отмечено, момент инерции кольца $\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m$. Выполним подстановку найденных величин и проинтегрируем от 0 до R.

$$J = \frac{2\pi m}{\pi R^2}\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2}\left.\frac{r^3}{4}\right|_0^R = \frac{mR^2}{2}.$$

Моменты инерции однородных тел, часто встречающиеся в практических задачах.

Тело	**Положение оси**	**Момент инерции**
Полый тонкостенный цилиндр	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск	Ось симметрии	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J = \frac{1}{3}ml^2$
Шар	Ось симметрии	$J = \frac{2}{5}mR^2$

2. Теорема Штейнера

Теорема Штейнера, или Гюйгенса-Штейнера, позволяет определять моменты инерции тел относительно осей, параллельных осям, проходящим через центр масс тел.

Теорема Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту его инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела и квадрата расстояния между осями (см. поясняющий рис. 4).

O_1O_2 – ось, проходящая через центр масс,

$O_1'O_2'$ – параллельная ей ось,

a – расстояние между осями.

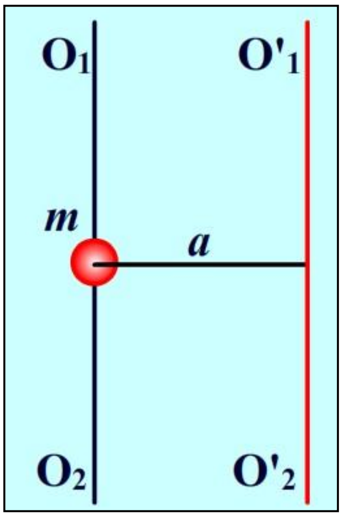

Рис. 4. К пояснению теоремы Штейнера

$$J = J_C + ma^2.$$

J – момент инерции относительно $O_1'O_2'$,

J_C – относительно O_1O_2.