МОДУЛЬ № 2
«ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА»
ЛЕКЦИЯ № 2
СИЛЫ В МЕХАНИКЕ
Часть I

План лекции:

1. Силы тяготения

1.1. Законы Кеплера

Так как в открытии Ньютоном закона всемирного тяготения большую роль сыграли законы движения планет, сформулированные Иоганном Кеплером, то сначала мы кратко остановимся на них (детально данные законы и сопутствующие понятия изучаются в курсе астрономии).

Первый закон Кеплера: каждая планета обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (см. рис. 1).

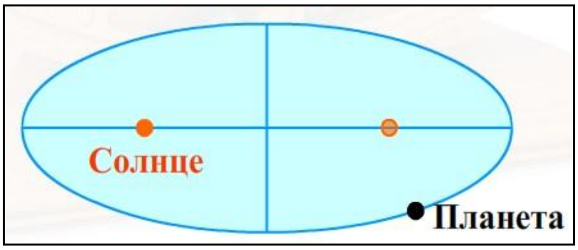

Рис. 1. К пояснению первого закона Кеплера

Второй закон Кеплера (закон площадей): радиус-вектор планеты за равные промежутки времени заметает равные площади (см. рис. 2).

Радиус-вектором здесь называется переменный по величине направленный отрезок, соединяющий Солнце и точку орбиты, в которой находится планета.

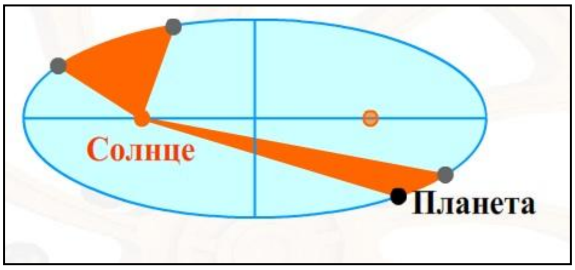

Рис. 2. К пояснению второго закона Кеплера

Третий закон Кеплера: квадраты звёздных периодов обращения планет относятся между собой как кубы больших полуосей их орбит.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

T_1 и T_2 – периоды обращения планет, a_1 и a_2 – большие полуоси их орбит (см. рис. 3).

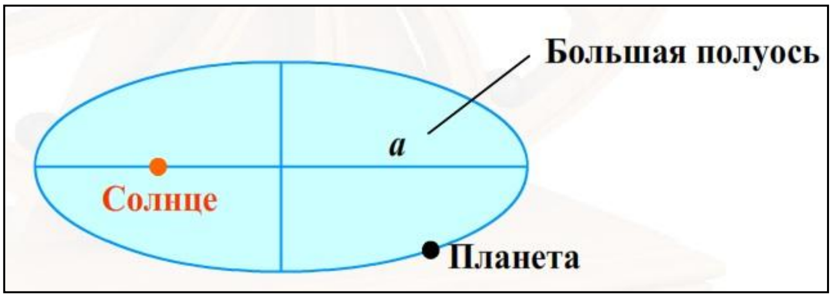

Рис. 3. К пояснению третьего закона Кеплера

1.2. Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения: любые две материальные точки (два тела) притягиваются с силами, прямо пропорциональными произведению их масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними.

Скалярная запись этого закона привычна. Но, так как сила – величина векторная, то нужно уметь записывать этот закон и в векторной форме. Чтобы не изменить модуля силы, но приписать ей направление, мы добавляем единичный вектор $\frac{\vec{r}_{12}}{r}$, который будет направлен от первого тела ко второму.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \; (\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r}).$$

В закон всемирного тяготения входит гравитационная постоянная, значение которой с точностью до сотых составляет $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ (единицы измерения легко записывать, мысленно выражая постоянную из закона).

Значение гравитационной постоянной впервые определил Кавендиш.

Лёгкое коромысло A (см. рис. 4) с двумя одинаковыми шариками массой $m = 729$ г подвешено на нити B. На коромысле C укреплены на той же высоте массивные шары массой $M = 158$ кг. Поворачивая коромысло C вокруг вертикальной оси, можно изменять расстояние между шарами с массами m и M. Под действием пары сил, приложенных к шарам m со стороны шаров M, коромысло A поворачивается в горизонтальной плоскости, закручивая нить B до тех пор, пока момент сил упругости не уравновесит момента сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по измеренному углу поворота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение G.

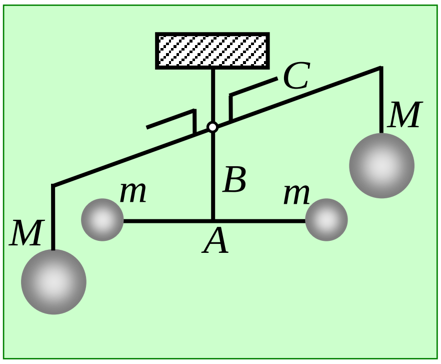

Рис. 3. К пояснению опыта Кавендиша

Закон всемирного тяготения имеет границы применимости, а именно он справедлив для материальных точек и тел со сферически симметрично распределённой массой. Если же тела таковыми не являются и расположены близко друг к другу, то придётся решать довольно сложную математическую задачу, разбивая тела на точечные элементы.

Обратим внимание на то, что в случае сферических тел расстояние отсчитывается между их центрами, вектор $\vec{r}_{12}$ направлен от первого тела ко второму, сила $\vec{F}_{12}$ приложена к первому телу и сонаправлена с $\vec{r}_{12}$.

Природа сил тяготения – гравитационная.

Силы тяготения являются **центральными**, т. е. направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки.

1.3. Силы тяжести

Частным случаем сил тяготения являются **силы тяжести** – силы, с которыми небесные тела, в частности, планета Земля, притягивают произвольные тела, находящиеся на их поверхности или в относительной близости от них.

Формула для силы тяжести имеет вид:

$$\vec{F} = m\vec{g}\,.$$

где $\vec{g}$ – **ускорение свободного падения**.

Сопоставим эту формулу с законом всемирного тяготения, где за M обозначена масса небесного тела, за m – масса произвольного рассматриваемого тела. Из простого сравнения нетрудно заключить, что

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{\left(R+h\right)^2},$$

где h – высота, на которой находится рассматриваемое тело, считая от поверхности небесного тела, а R – его радиус.

Таким образом, ускорение свободного падения зависит от массы и размеров небесного тела, а также высоты, на которой находится данное тело, считая от поверхности небесного.

Для поверхности Земли, используя округлённые значения её массы и радиуса, можно получить следующее приблизительное значение

$g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (в учебных задачах часто округляется до $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$).

Но нужно помнить, что ускорение свободного падения у поверхности Земли различно на разных широтах. Вследствие своего вращения Земля не является идеальным шаром, она сплюснута в направлении полюсов. И, например, ускорение свободного падения будет на полюсах больше, чем на экваторе.

Сила тяжести $\vec{F}$ имеет направление вдоль прямой, от рассматриваемого тела к центру небесного.

1.4. Вес тела. Невесомость

Этот вопрос тесно связан с силами тяжести. В основном рассуждения будем вести по отношению к Земле. Дадим определение веса тела.

Вес тела – сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле (небесному телу в общем случае) оказывает действие на опору или растягивает подвес, удерживающие тело от свободного падения.

Представим себе динамометр или бытовой безмен (см. рис. 4). Если он находится в покое, то сила тяжести, действующая на груз, уравновешивается силой упругости. Вес в этом случае численно равен силе упругости и силе тяжести (но приложен он не к грузу, а к подвесу и является также упругой силой).

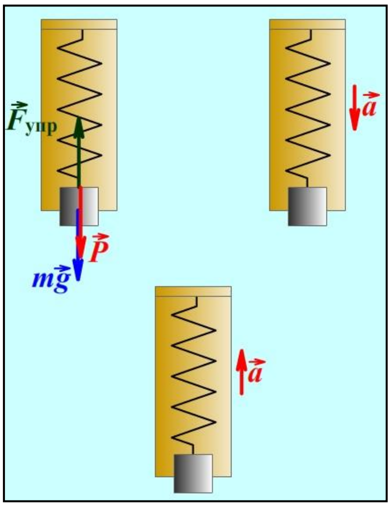

Рис. 4. К пояснению понятия веса

При движении динамометра с ускорением, направленным вверх, пружина ещё больше растянется, что свидетельствует об увеличении веса груза (масса и сила тяжести, конечно же, не меняются). Причём вес увеличивается на величину, равную ma.

При движении динамометра с ускорением, направленным вниз, вес груза уменьшится на величину ma.

Несложно догадаться, что если $\vec{a} = \vec{g}$, то груз вовсе не будет растягивать пружину, его вес (но не масса!) станет равным нулю.

Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием **невесомости**.

1.5. Напряжённость и потенциал поля тяготения

Познакомимся с некоторыми элементами теории поля, расширим представление о характеристиках поля тяготения (более подробно о теории поля речь будет идти в курсе электродинамики).

Гравитационное взаимодействие осуществляется посредством особой формы материи – **поля тяготения** (по-другому, **гравитационного поля**) – вне зависимости от той среды, в которой находятся тела.

В качестве его векторной характеристики может выступать вектор $\vec{g}$, т. к. он не зависит от массы тела, на которое воздействует поле.

В связи с аналогией между гравитационным и электростатическим полями он также получил название **напряжённости поля тяготения**.

Напряжённость поля тяготения, $\vec{g}$ – векторная физическая величина, определяемая силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы.

Поле тяготения называется **однородным**, если его напряжённость одинакова по величине и направлению во всех его точках.

Поле тяготения называется **центральным**, если во всех точках поля векторы его напряжённости направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке, неподвижной относительно какой-либо инерциальной системы отсчёта.

Скалярная характеристика гравитационного поля получила название потенциала поля тяготения.

Потенциал поля тяготения, φ – скалярная физическая величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля.

$$\varphi = \frac{\Pi}{m},$$

$$[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

Геометрическое место точек, имеющих одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной поверхностью**.

1.6. Космические скорости

Первая космическая (круговая) скорость – минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли (или другого небесного тела) по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли (или другого небесного тела).

Формулу для первой космической скорости несложно получить, воспользовавшись законом всемирного тяготения, вторым законом Ньютона в частной форме и формулой для центростремительного ускорения. Подробные выкладки предлагается сделать самостоятельно.

$$G\frac{Mm}{r^2} = \frac{m\upsilon_1^2}{r}.$$

Для околоземного пространства формула преобразуется к виду

$$\upsilon_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{G\frac{M}{R^2}R} = \sqrt{gR},$$

где R – радиус Земли, g – ускорение свободного падения или напряжённость гравитационного поля Земли вблизи её поверхности.

Численное значение первой космической скорости для околоземной орбиты составляет

$$\upsilon_1 = 7{,}9 \text{ км/с}.$$

Второй космической (или **параболической**) **скоростью** называется наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца, т. е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической.

Формулу для второй космической скорости можно получить, исходя из закона сохранения механической энергии.

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = G\frac{Mm}{R}.$$

Как показывают расчёты, она в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2\cdot G\frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\cdot\upsilon_1.$$

И для Земли составляет

$$\upsilon_2 = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Третьей космической скоростью называется скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.

Она оставляет

$$\upsilon_3 = 16{,}7 \text{ км/с}.$$

2. Движение тела в однородном поле силы тяжести (движение тела, брошенного под углом к горизонту)

Математическая справка

Синус острого угла прямоугольного треугольника – отношение противолежащего катета к гипотенузе (см. рис. 5).

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинус острого угла прямоугольного треугольника – отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – отношение противолежащего катета к прилежащему.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}.$$

Котангенс острого угла прямоугольного треугольника – отношение прилежащего катета к противолежащему.

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}.$$

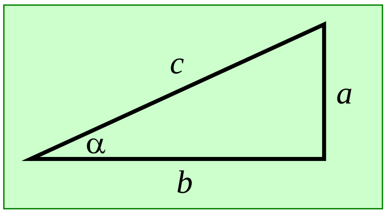

Рис. 5. К пояснению тригонометрических функций

Заметим, что желательно научиться выражать через тригонометрические функции катеты и гипотенузу без лишних предварительных преобразований. Для исключения ошибок следует помнить, что гипотенуза больше катета, а $|\sin\alpha| \le 1$ и $|\cos\alpha| \le 1$.

$$a = c \cdot \sin\alpha.$$

$$b = c \cdot \cos\alpha.$$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, является сложным. Для простоты изучения его раскладывают на два более простых:

1) равномерное движение вдоль оси Ox[1] (см. рис. 6);

2) равнопеременное движение вдоль оси Oy[2].

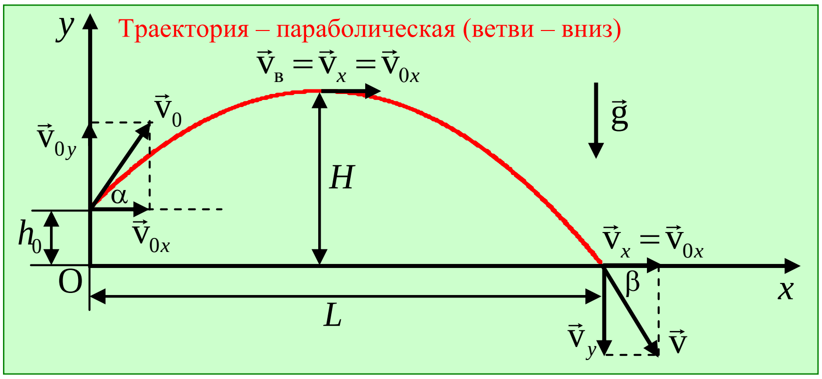

Рис. 6. К пояснению движения тела,
брошенного с некоторой высоты под углом к горизонту

Из геометрических соображений следует, что горизонтальная и вертикальная проекции начальной скорости соответственно равны:

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha,$$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha.$$

Напомним кинематические уравнения для равномерного движения (в проекциях на ось Ox):

$$a_x = 0,$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \mathrm{const},$$

$$x = x_0 + \upsilon_x t.$$

[1] В горизонтальном направлении на тело не действуют никакие силы (в большинстве школьных задач сопротивлением воздуха пренебрегают).

[2] В вертикальном направлении на тело действует только сила тяжести, сообщающая различным телам одинаковое ускорение свободного падения g.

Это своего рода шаблоны, которые следует «приспособить» к конкретной задаче.

Итак, в нашем случае (см. рис. 6):

$$a_x = 0,$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha,$$

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t \;\; (x_0 = 0).$$

Последнее уравнение позволяет получить формулу для вычисления **дальности полёта** (величина дальности полёта – есть конечная координата x тела, координата в момент времени t_0):

$L = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_0$, где t_0 – **время всего полёта**.

Напомним кинематические уравнения для равнопеременного движения (в проекциях на ось Оy):

$$a_y = \mathrm{const},$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t,$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

«Приспособим» их к нашей задаче:

$$a_y = -g,$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \sin\alpha - gt,$$

$$y = h_0 + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Применение двух последних уравнений к моменту времени, когда тело находится в верхней точке траектории, позволяет рассчитать **максимальную высоту подъёма**, а к моменту времени t_0 – общее время полёта.

Для $t = t_\text{в}$:

$$0 = \upsilon_0 \sin\alpha - g t_\text{в} \Rightarrow t_\text{в} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g},$$

$$H = h_0 + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_\text{в} - \frac{g t_\text{в}^2}{2} \Rightarrow H = h_0 + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Для $t = t_0$:

$$0 = h_0 + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_0 - \frac{g t_0^2}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2 g h_0}}{g}.$$

В итоге имеем:

1) **дальность полёта**:

$$L = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_0;$$

2) **максимальная высота подъёма**:

$$H = h_0 + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g};$$

3) **общее время полёта**:

$$t_0 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2 g h_0}}{g};$$

4) **время подъёма**:

$$t_{\text{под}} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g};$$

5) **время спуска**:

$$t_{\text{сп}} = \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2 g h_0}}{g};$$

6) **модуль скорости** (для любой точки):

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha + \left(\upsilon_0 \sin\alpha - g t\right)^2};$$

7) **угол** (острый), **составляемый вектором скорости с горизонталью** (для любой точки):

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}.$$

Данные уравнения запоминать не нужно. Следует знать кинематические уравнения равномерного и равнопеременного движения и уметь их «приспосабливать» для конкретной ситуации.

Проиллюстрируем это ещё раз для более простого и более распространённого в школьных задачах случая, когда $h_0 = 0$ (см. рис. 7).

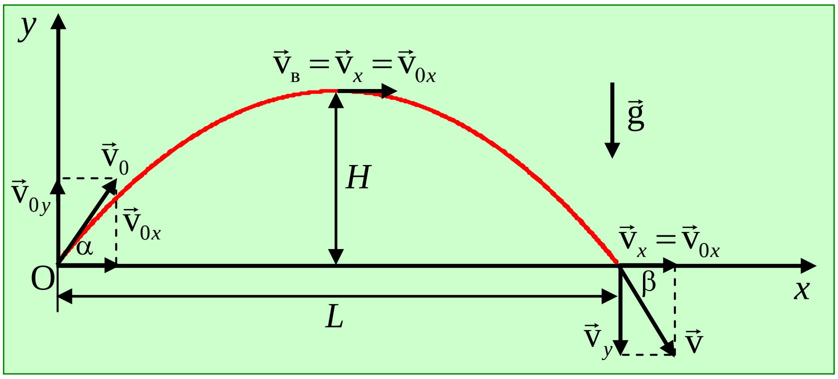

Рис. 7. К пояснению движения тела,
брошенного под углом к горизонту

Для вычисления дальности полёта «приспосабливаем» кинематическое уравнение для координаты x при равномерном движении ($x = x_0 + \upsilon_x t$) к моменту времени $t = t_0$:

$$L = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_0,$$

т. к. для $t = t_0$ $x = L$, а $x_0 = 0$, $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$.

Из соображений симметрии ясно, что время подъёма равно времени спуска, т. е. $t_{под} = t_{сп} = \frac{t_0}{2}$ (это можно показать и более строго).

Для вычисления времени всего полёта «приспосабливаем» кинематическое уравнение для проекции скорости при равнопеременном движении ($\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t$) к моменту времени $t = \frac{t_0}{2}$ (тело находится в верхней точке траектории):

$$0 = \upsilon_0 \sin\alpha - g \cdot \frac{t_0}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g},$$

т. к. для $t = \frac{t_0}{2}$ $\upsilon_y = 0$, а $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$, $a_y = -g$.

Для вычисления максимальной высоты подъёма «приспосабливаем» кинематическое уравнение для координаты y при равнопеременном движении ($y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}$) к моменту времени $t = \frac{t_0}{2}$ (тело находится в верхней точке траектории):

$$H = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot \frac{t_0}{2} - \frac{g t_0^2}{8},$$

т. к. для $t = \frac{t_0}{2}$ $y = H$, а $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$, $a_y = -g$.

Итак, при $h_0 = 0$:

$$t_0 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g},$$

$$L = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_0,$$

$$H = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot \frac{t_0}{2} - \frac{g t_0^2}{8}.$$

Исключая время из формул для дальности полёта и максимальной высоты подъёма, имеем удобные в определённых случаях соотношения:

$$L = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

$$H = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Как следует из данных формул, при заданной υ_0 дальность полёта наибольшая при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, а максимальная высота подъёма наибольшая при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (тело брошено вертикально вверх).

2.1. Частные случаи движения тела, брошенного под углом к горизонту

2.1.1. Тело брошено вертикально вверх (вниз)

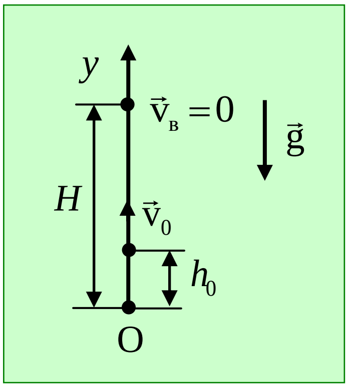

Рис. 8. К пояснению движения тела, брошенного вертикально вверх

$$a_y = -g,$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 - gt,$$

$$y = h_0 + \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

При $h_0 = 0$ для $t = t_{\text{под}}$:

$$0 = \upsilon_0 - gt_{\text{под}} \Rightarrow t_{\text{под}} = \frac{\upsilon_0}{g},$$

$$H = \upsilon_0 t_{\text{под}} - \frac{gt_{\text{под}}^2}{2} \Rightarrow H = \frac{\upsilon_0^2}{2g}.$$

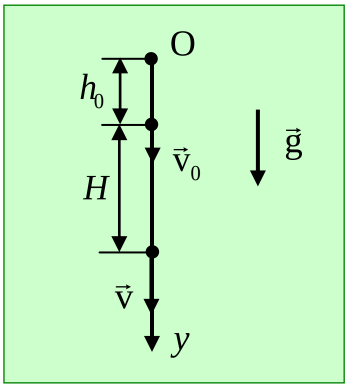

Рис. 9. К пояснению движения тела, брошенного вертикально вниз

$$a_y = g,$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 + gt,$$

$$y = h_0 + \upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

При $h_0 = 0$, $\upsilon_0 = 0$ для $t = t_{\text{пад}}$:

$$\upsilon = gt_{\text{пад}} \Rightarrow t_{\text{пад}} = \frac{\upsilon}{g},$$

$$H = \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2} \Rightarrow H = \frac{\upsilon_0^2}{2g}.$$

2.1.2. Тело брошено горизонтально

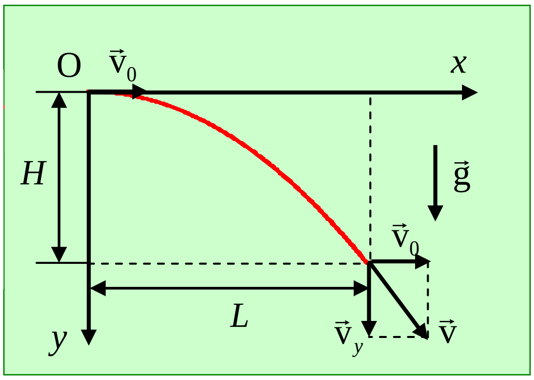

Рис. 10. К пояснению движения тела, брошенного горизонтально

$$a_x = 0,\ \upsilon_x = \upsilon_0,\ x = \upsilon_0 t,$$

$$a_y = g,\ \upsilon_y = gt,\ y = \frac{gt^2}{2}.$$

Для $t = t_{\text{пад}}$:

$$L = \upsilon_0 t_{\text{пад}},$$

$$\upsilon_y = gt_{\text{пад}},\ \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \left(gt_{\text{пад}}\right)^2},$$

$$H = \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2}.$$

Ещё раз отметим, что формулы для различных случаев движения тела, брошенного под углом к горизонту, целесообразно не запоминать, а каждый раз получать на основе кинематических уравнений, чётко придерживаясь выбранной системы координат[3].

[3] Особенно внимательно нужно следить за знаками алгебраических величин, в частности, проекций.