МОДУЛЬ № 4 «МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

<u>ЛЕКЦИЯ № 3</u>

ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

План лекции:

1. Свободные затухающие колебания 2

1.1. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы 2

1.2. Решение дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний для пружинного маятника 4

1.3. Автоколебания.. 7

2. Вынужденные колебания 7

2.1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний 8

2.2. Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний 8

2.3. Резонанс 9

1. Свободные затухающие колебания

Реальные собственные колебания всегда являются затухающими, если не производится компенсация энергетических потерь.

Собственные (свободные) затухающие колебания – собственные колебания, которые затухают с течением времени вследствие энергетических потерь колебательной системой.

Другими словами, это колебания с уменьшающейся амплитудой.

В механических колебательных системах простейшим механизмом уменьшения энергии является её превращение в теплоту из-за наличия сил трения.

1.1. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы

Дадим математическое описание затухающих колебаний.

Будем рассматривать лишь **линейные системы**, то есть системы, в которых параметры, определяющие её физические свойства, в ходе процесса не изменяются.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где x – значение колеблющейся величины (например, координаты колеблющегося на пружине груза), $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ – её первая и вторая производные по времени соответственно, $\delta = \mathrm{const}$ – **коэффициент затухания**, ω_0 – циклическая частота незатухающих колебаний той же колебательной системы, то есть при $\delta = 0$ (собственная частота).

Получим указанную формулу на примере пружинного маятника (для других линейных колебательных систем уравнения будут идентичными).

Пусть груз совершает собственные затухающие колебания вдоль горизонтальной прямой в сопротивляющейся среде.

Считаем, что сила сопротивления, действующая на груз, прямо пропорциональна его скорости и направлена в противоположную сторону.

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{\upsilon},\ r = \text{const}$$ – коэффициент сопротивления.

Заметим, что крайнем правом положении (см. рис. 1) сила сопротивления направлена вправо, то есть противоположно силе упругости, а после прохождения положения равновесия и при движении груза влево эти силы будут сонаправлены.

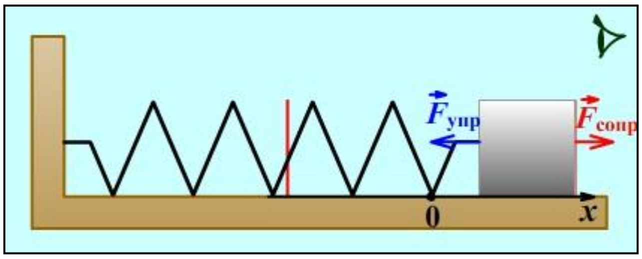

Рис. 1. К пояснению затухающих колебаний

Согласно второму закону Ньютона в частной форме:

$$\vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} = m\vec{a}.$$

В проекциях

$$-kx - r\upsilon_x = ma_x.$$

С учётом определений мгновенных скорости и ускорения переписываем соотношение в виде:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0.$$

Обе части уравнения делим на массу, а также для удобства умножаем и одновременно делим второй коэффициент на двойку:

$$\ddot{x} + 2\cdot\frac{r}{2m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Вводим обозначения:

$$\delta = \frac{r}{2m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Окончательно приходим к дифференциальному уравнению собственных затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

1.2. Решение дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний для пружинного маятника

Решение дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний имеет вид (рассуждения ведём в отношении пружинного маятника, а затем распространяем полученный результат и на другие колебательные системы):

$$x = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}$ – **амплитуда затухающих колебаний**, где A_0 – **начальная амплитуда**, δ – коэффициент затухания.

φ_0 – начальная фаза.

ω – циклическая частота <u>затухающих</u> колебаний.

Она связана с частотой ω_0 и коэффициентом затухания следующим соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}\,.$$

Получим указанные соотношения.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$l^2 + 2\delta l + \omega_0^2 = 0.$$

Дискриминант характеристического уравнения:

$$D_1 = \delta^2 - \omega_0^2.$$

(Использована формула для квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом).

Сначала рассмотрим случай, когда

$$D_1 = \delta^2 - \omega_0^2 < 0\,.$$

В этом случае уравнение имеет два комплексно сопряжённых корня:

$$l_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ .$$

Обозначим:

$$\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения примет вид:

$$x = C_1\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\omega t + C_2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t,$$

где $C_1 = A_0$, $C_2 = 0$.

То есть имеем:

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\omega t \text{ (см. рис. 2).}$$

При не равной нулю начальной фазе уравнение приобретает ранее заявленный вид:

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Рассмотрим второй случай, когда дискриминант

$$D_1 = \delta^2 - \omega_0^2 \geq 0.$$

При $\delta = \omega_0$ движение перестаёт быть периодическим, колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю. Процесс становится **апериодическим**.

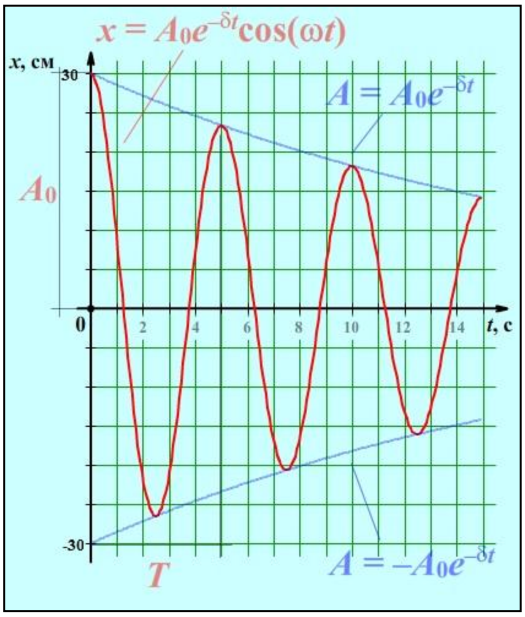

Рис. 2. Графическая интерпретация затухающих колебаний

Рассмотрим некоторые дополнительные характеристики затухающих колебаний.

Время релаксации, τ – промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в *e* раз.

Так как $A = A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}$, то $\tau = \dfrac{1}{\delta}$. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой.

Как мы уже говорили ранее, затухание нарушает периодичность колебаний, но понятием периода и частоты можно пользоваться при малых значениях коэффициента затухания, поэтому под периодом затухающих колебаний мы будем понимать промежуток времени между двумя последовательными максимумами (или минимумами) колеблющейся величины и пользоваться следующим соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Декремент затухания – отношение амплитуд двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}}{A_0 \mathrm{e}^{-\delta(t+T)}} = \mathrm{e}^{\delta T}.$$

Логарифмический декремент затухания – это натуральный логарифм от декремента затухания, который очевидным образом представляется через коэффициент затухания δ и период T, или период и время релаксации τ, а также через число колебаний N_e, совершаемых за время, равное времени релаксации:

$$\theta = \ln \mathrm{e}^{\delta T} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_\mathrm{e}}.$$

Видим, что логарифмический декремент затухания – постоянная для данной колебательной системы величина.

Добротность (при малых значениях логарифмического декремента):

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

(т. к. затухание мало $\delta^2 << \omega_0^2$, то T принято равным T_0).

Из формулы следует, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых за время, равное времени релаксации.

Добротность пружинного маятника:

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{r}.$$

1.3. Автоколебания

На практике очень важно поддерживать колебания незатухающими. Это возможно в так называемых автоколебательных системах, где энергетические потери восполняются за счёт действий самой системы.

Автоколебания – колебания, которые поддерживаются незатухающими в реальной диссипативной колебательной системе за счёт управления ей активным элементом, восполняющим неизбежные потери энергии.

Автоколебательная система сама обеспечивает согласованность поступления энергии от источника в нужный момент времени, в такт с её колебаниями.

Ярким примером механической автоколебательной системы являются часы с храповым механизмом.

2. Вынужденные колебания

Компенсация энергетических потерь и поддержание колебаний незатухающими возможны и в случае действия внешнего периодически действующего фактора.

Так, **вынужденные механические колебания** совершаются в колебательной системе за счёт действия внешней периодически изменяющейся силы.

2.1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний несложно записать на основе полученного ранее опыта работы с дифференциальным уравнением затухающих колебаний. В уравнении, записанном согласно второму закону Ньютона, появится ещё одна сила, меняющаяся по гармоническому закону $F_0 \cos\omega_в t$, где F_0 – амплитуда вынуждающей силы, $\omega_в$ – циклическая частота её изменения. Остальные слагаемые уравнения ранее уже встречались.

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + F_0 \cos\omega_в t.$$

После преобразований уравнению можно придать вид:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_в t.$$

2.2. Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний

Данное уравнение уже не будет однородным, поэтому его решение будем искать как сумму общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения, которое мы решали ранее, и частного решения x_2 данного неоднородного уравнения:

$$x = x_1 + x_2.$$

Результат решения однородного уравнения уже известен:

$$x_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

Выражение для частного решения x_2 запишем в готовом виде.

$$x_2 = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_в^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_в^2}}\cos\left(\omega_в t - \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega_в}{\omega_0^2 - \omega_в^2}\right).$$

Проанализируем данные зависимости.

Можно заметить, что частное решение x_2 представляет собой также гармоническое колебание с амплитудой, определяемой выражением перед косинусом, и начальной фазой, равной второму слагаемому в скобках, взятому с противоположным знаком.

$$A_1 = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_в^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_в^2}},$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega_в}{\omega_0^2 - \omega_в^2}.$$

Также отметим, что слагаемое x_1 в решении дифференциального уравнения вынужденных колебаний играет роль лишь при установлении колебаний (см. рис. 3).

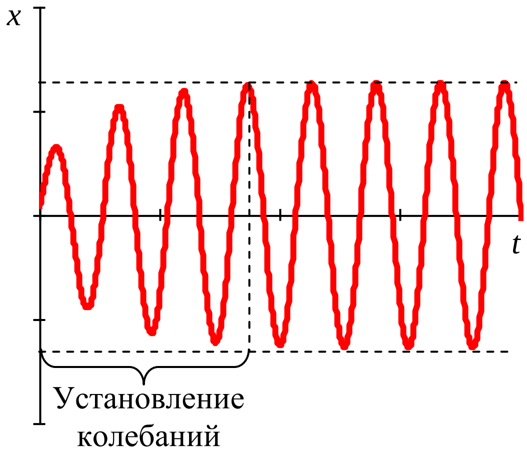

Рис. 3. К пояснению вынужденных колебаний

2.3. Резонанс

Механический резонанс – явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы.

Из формулы для амплитуды A_1 следует, что она имеет максимум:

$$A_1 = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_в^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_в^2}}.$$

Если заметить, что амплитуда A_1 имеет максимум, когда подкоренное выражение имеет минимум, то математические выкладки будут гораздо проще.

Найдём производную от подкоренного выражения по $\omega_в$ и приравняем её к нулю:

$$2\left(\omega_0^2-\omega_в^2\right)\left(-2\omega_в\right)+8\delta^2\omega_в=0.$$

Преобразуем:

$$-4\omega_в\left(\omega_0^2-\omega_в^2-2\delta^2\right)=0.$$

Физический смысл имеет только положительный корень этого уравнения, называемый **резонансной частотой**:

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}\,.$$

При этом

$$A_{рез}=\frac{X_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}\,.$$

Построим график зависимости амплитуды A_1 от вынуждающей частоты $\omega_в$, так называемую **резонансную кривую**.

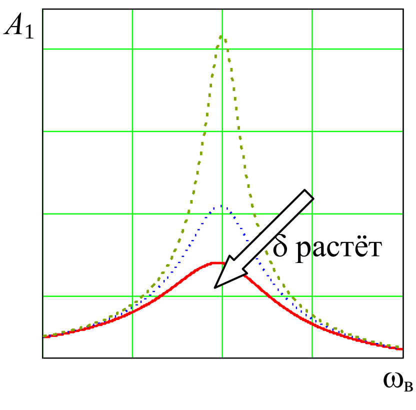

Рис. 4. Резонансные кривые

Видим, что при увеличении коэффициента затухания максимум резонансных кривых смещается вниз и влево.