

3.1 Линейные электрические цепи гармонического тока в установившихся режимах

Слайд 1

Добрый день! Сегодня мы рассмотрим новую тему «Линейные электрические цепи гармонического тока в установившихся режимах».

Электромагнитный процесс в электрической цепи, при котором мгновенные значения напряжения и тока повторяются через промежутки времени, равные периоду, называются периодическими.

Простейшей периодической функцией является синусоидальная или гармоническая.

Все остальные периодические функции могут быть разложены в соответствии с разложением Фурье в бесконечный ряд синусоид, имеющих кратные частоты.

Слайд 2. Рассмотрим основные параметры гармонического сигнала на примере мгновенного значения тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \cos(\omega t + \psi_i - \pi/2)$.

График зависимости мгновенных значений функции $i(t)$ называют временной диаграммой.

Максимальное по модулю значение функции $i(t)$ за период – *амплитуда* I_m [А].

Аргумент гармонической функции $(\omega t + \psi_i)$ называется *мгновенной фазой*, которая определяет значение функции $i(t)$ в любой момент времени.

ψ_i – *начальная фаза* функции или аргумент функции при $t = 0$.

Период гармонической функции T равен 2π радиан или 360° .

Величина, обратная периоду, называется частотой и обозначается $f = 1/T$ [Гц];

$\omega = 2\pi f$ – *угловая частота* или скорость изменения аргумента функции. Она задается в радианах в секунду или в градусах.

Слайд 3. Любую гармоническую функцию можно охарактеризовать средним, средневыпрямленным и действующим значением.

Так как среднее значение гармонического сигнала за период равно нулю, то в качестве одной из его характеристик принято использовать среднее значение за полпериода. Оно называется *средневыпрямленным* и определяется по формуле

$$I_{ср.в.} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m$$

Тепловое действие тока пропорционально квадрату тока. Поэтому о величине тока судят по так называемому *действующему* значению (с точки зрения математики – это *среднеквадратическое* значение).

$$\text{Действующее значение тока равно: } I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m$$

Полученное соотношение между действующим и амплитудным значением тока полезно запомнить.

Аналогичная зависимость существует и между действующим и амплитудным значением напряжения.

Если обе части этого уравнения возвести в квадрат и умножить на RT , то получим

$$R \cdot I^2 \cdot T = \int_0^T R \cdot i^2 dt$$

Это равенство показывает, что действующее значение периодического тока равно по величине такому постоянному току, который проходя через сопротивление R за время, равное T , выделяет то же количество тепла, что и переменный ток $i(t)$.

Поэтому для постоянного тока и действующего значения переменного тока используется одно и то же обозначение I (без индексов!).

Слайд 4. При анализ линейной цепи вне зависимости от вида входного сигнала (постоянного или гармонического) в общем случае требуется составления системы линейных независимых уравнений, которые составляются на основании компонентных (по закону Ома) и топологических (по законам Кирхгофа) уравнений.

Решая эту систему относительно искомых параметров, необходимо выполнять с гармоническими сигналами, например с $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$, такие линейные операции, как:

- умножение на скаляр $a \cdot i(t) = a \cdot I_m \sin(\omega t + \psi)$
- алгебраическое сложение нескольких гармонических функций одной частоты $i_1(t) + i_2(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2) = I_m \sin(\omega t + \psi)$
- дифференцирование $\frac{di(t)}{dt} = \omega \cdot I_m \sin(\omega t + \psi + \pi/2)$
- интегрирование $\int i(t) dt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi - \pi/2)$.

Таким образом, при выполнении линейных операций над гармоническими функциями получаются гармонические функции той же частоты. Изменяются лишь амплитуда и начальная фаза, которые и подлежат определению.

Слайд 5. Мгновенные значения гармонической функции $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$ можно получить как проекцию на ось ординат вектора длиной I_m , вращающегося относительно начала прямоугольной системы координат с угловой скоростью ω против часовой стрелки (т.е., в положительном направлении).

В момент времени $t=0$ вектор образует с осью абсцисс угол ψ .

Его проекция на ось ординат равна мгновенному значению функции $i(t)$ при $t=0$.

В момент времени $t=t_1$ вектор повернется на угол ωt_1 .

При этом его проекция на ось ординат будет соответствовать мгновенному значению $i(t_1) = I_m \sin(\omega t_1 + \psi)$ на временной диаграмме.

В момент времени $t=t_2$ проекция вектора на ось ординат будет равна $i(t_2) = I_m \sin(\omega t_2 + \psi)$ и т.д.

За время T , равное периоду гармонического сигнала вектор сделает полный оборот и вернется в исходное положение.

Слайд 6. Если два гармонических колебания $i_1(t)$ и $i_2(t)$, представленные на временной диаграмме, имеют одинаковую частоту, то соответствующие этим колебаниям векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью. Поэтому углы между ними остаются неизменными.

Разность начальных фаз $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ называется фазовым сдвигом или углом сдвига $i_2(t)$ относительно $i_1(t)$.

Если фазовый сдвиг φ равен нулю, то говорят, что векторы совпадают по фазе.

А если $\varphi=180^\circ$, то такие векторы находятся в противофазе.

Изобразим на векторной диаграмме оба вектора, соответствующие гармоническим колебаниям $i_1(t)$ и $i_2(t)$, с учетом их амплитуды и начальной фазы.

На векторной диаграмме с помощью геометрического сложения векторов $\vec{I}_{1m}$ и $\vec{I}_{2m}$ легко построить суммарный вектор $\vec{I}_{1m} + \vec{I}_{2m}$.

Длина этого вектора соответствует амплитуде суммарного гармонического сигнала и может быть найдена по формуле

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2 \cdot I_{1m} \cdot I_{2m} \cdot \cos(\psi_1 - \psi_2)}.$$

Начальная фаза суммарного вектора может быть найдена как арктангенс из следующего выражения $tg \psi = \frac{I_{1m} \cdot \sin \psi_1 + I_{2m} \cdot \sin \psi_2}{I_{1m} \cdot \cos \psi_1 + I_{2m} \cdot \cos \psi_2}$

Слайд 7. Рассмотрим, как ведет себя электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления, индуктивности и емкости, при прохождении через них гармонического тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

Гармоническое напряжение на ее зажимах ЭЦ $u(t)$ будет равно алгебраической сумме падений гармонических напряжений на каждом элементе $u(t) = u_R + u_L + u_C$.

По закону Ома это выражение можно записать как $i \cdot R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$.

Подставим в это выражение значение $i(t)$.

В результате получим:

- первое слагаемое будет равно $R I_m \sin(\omega t + \psi_i)$;
- второе слагаемое будет равно $L \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i)$;
- а третье слагаемое будет равно $-\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i)$.

Заменив косинус на синус, получим выражение для $u(t)$ в следующем виде:

$$R I_m \sin(\omega t + \psi_i) + L \omega I_m \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) + \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ)$$

Из выражения следует, что напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности опережает ток на 90° , а напряжение на емкости отстает от тока на 90° .

Слайд 8. Так как напряжения на индуктивности и емкости находятся в противофазе, то суммарное падение напряжения на них будет равно их разности.

А общее выражение для напряжения $u(t)$ может быть записано как (ПРОЧИТАТЬ) $u(t) = R I_m \sin(\omega t + \psi_i) + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ)$.

В этом выражении R – это активное сопротивление. Оно всегда положительное.

Величины $X_L = \omega L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C}$, имеющие размерность сопротивления, получили название реактивного индуктивного и емкостного сопротивления, соответственно.

Разность этих сопротивлений $X = X_L - X_C = L\omega - \frac{1}{\omega C}$ называется реактивным сопротивлением.

Если $X > 0$, то реактивное сопротивление имеет индуктивный характер, а если $X < 0$ – то емкостной.

Амплитудные значения напряжений и токов на элементах связаны между собой по закону Ома $U_{Rm} = I_m \cdot R$, $U_{Lm} = I_m \cdot X_L$, $U_{Cm} = I_m \cdot X_C$.

Учитывая, что амплитудное значение гармонического сигнала в $\sqrt{2}$ раз больше его действующего значения, получим аналогичные выражения и для действующих значений напряжений на R , L и C элементах: $U_R = I \cdot R$, $U_L = I \cdot X_L$, $U_C = I \cdot X_C$.

Слайд 9. На слайде приведены временные диаграммы, на которых в общем виде показаны зависимости $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$, и $u_C(t)$.

Амплитуды этих напряжений и токов взяты произвольно, а начальные фазы напряжений соответствуют полученному ранее выражению для напряжения $u(t)$:

- ток и напряжение на резисторе совпадают по фазе: они одновременно достигают своих амплитудных значений и проходят через нуль;
- напряжение на индуктивности опережает ток на 90° ;
- а напряжение на емкости отстает от тока на 90° , т.е., оно находится в противофазе к напряжению на индуктивности.

Слайд 10. Для нахождения действующего значения суммарного напряжения U и сдвига по фазе между напряжением и током φ построим векторную диаграмму.

Зададимся на ней направлением вектора тока $\vec{I}$ с нулевой начальной фазой.

Вектор напряжения на сопротивлении будет совпадать по фазе с током, вектор напряжения на индуктивности будет опережать его на 90° , а вектор напряжения на емкости будет отставать от него на 90° . Длины векторов возьмем произвольно, так как мы строим качественную диаграмму без результатов расчета.

Из полученной векторной диаграммы следует, что входное напряжение U на зажимах цепи можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\vec{U}_R$ и векторной сумме $\vec{U}_L + \vec{U}_C$ по формуле

$$U = \sqrt{(R \cdot I)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \cdot I^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + X^2} = I \cdot Z$$

Параметр $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$ называется полным сопротивлением цепи.

Из векторной диаграммы можно также найти угол фазового сдвига между входным напряжением и током $\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

Если он положительный, как на данной векторной диаграмме, то характер сопротивления цепи резистивно-индуктивный и напряжение опережает ток на угол φ .

А соответствующее мгновенное значение суммарного напряжения будет равно

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi).$$

Если угол φ отрицательный, то характер сопротивления цепи резистивно-емкостной и напряжение будет отставать от тока на угол φ .

Слайд 11. Рассмотрим, как ведет себя электрическая цепь, состоящая из соединенных параллельно сопротивления, индуктивности и емкости, при подаче на ее вход гармонического напряжения $u(t) = U_m \sin \omega t$.

По 1 закону Кирхгофа гармонический ток на входе цепи $i(t)$ будет равно алгебраической сумме гармонических токов в параллельных ветвях $i(t) = i_R + i_L + i_C$.

С учетом закона Ома и указанных ранее сдвигов по фазе между током и напряжением на каждом элементе выражение для $i(t)$ можно записать следующим образом:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_i) + \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ) + \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Так как ток на индуктивности и емкости находятся в противофазе, то их суммарный ток будет равен их разности:

$$= \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_i) + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) U_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

Входящая в это уравнение величина $B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ называется реактивной проводимостью.

Если $B > 0$, то реактивная проводимость имеет индуктивный характер, а если $B < 0$ – то емкостной.

Активная проводимость $G = \frac{1}{R}$ всегда положительна.

Слайд 12. Для нахождения действующего значения суммарного тока I и сдвига по фазе φ между напряжением и током построим векторную диаграмму.

Зададимся на ней направлением входного напряжения $\vec{U}$ с нулевой начальной фазой.

По отношению к вектору $\vec{U}$ вектор тока через сопротивление $\vec{I}_R$ совпадает с ним по фазе, вектор тока на емкости опережает его на 90° , а вектор тока на индуктивности отстает от него на 90° .

Длины векторов возьмем произвольно.

Из полученной векторной диаграммы следует, что суммарный ток можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\vec{I}_R$ и векторной сумме $\vec{I}_L + \vec{I}_C$ по формуле $I = \sqrt{(G \cdot U)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 \cdot U^2} = U\sqrt{G^2 + B^2} = U \cdot Y$

Параметр $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ называется полной проводимостью цепи.

Из векторной диаграммы можно также найти угол фазового сдвига между входным напряжением и током $\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{G}$.

Если он отрицательный, как на данной векторной диаграмме, то характер сопротивления цепи резистивно-емкостной и напряжение отстает от тока на угол φ .

А соответствующее мгновенное значение суммарного тока будет равно

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi).$$

Слайд 12. Спасибо за внимание!