

Слайд 1 Метод комплексных амплитуд

Добрый день! Сегодня мы рассмотрим применение Метода комплексных амплитуд для расчета линейных электрических цепей гармонического тока.

С помощью гармонических функций времени удобно описывать электромагнитные процессы только в простейших цепях гармонического тока.

На практике линейные электрические цепи в установившихся режимах обычно рассчитывают с помощью метода комплексных амплитуд.

Он основан на аналитическом представлении гармонических функций в виде вращающихся векторов в комплексной форме.

Это позволяет перейти от интегро-дифференциальных уравнений относительно тригонометрических функций времени к алгебраическим уравнениям с комплексными величинами, что существенно упрощает расчет.

При этом могут быть использованы все методы расчета, используемые для расчета цепей постоянного тока, но в комплексной форме.

Кроме того, так как в гармонической цепи устанавливаются колебания той же частоты, что и само гармоническое воздействие, то неизвестными параметрами их напряжений и токов будут лишь их амплитуды и фазы, которые однозначно определяются с помощью комплексных амплитуд.

Слайд 2. Рассмотрим, как можно представить гармонический сигнал

$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ в комплексной форме.

Поставим в соответствие гармонической функции i мгновенный комплекс $\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$.

Модуль мгновенного комплекса $\underline{i}$ равен амплитуде гармонического сигнала I_m , а аргумент – его фазе $(\omega t + \psi_i)$.

В электротехнике мнимая единица равная $\sqrt{-1}$ обозначается j .

Представим экспоненту как произведение двух других экспонент

$$\underline{i} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \underline{I_m} e^{j\omega t}$$

Произведение $I_m e^{j\psi_i}$ получило название комплексная амплитуда $\underline{I_m}$. Как видно она не зависит от времени.

Множитель $e^{j\omega t}$ называется вектор вращения.

Комплексную амплитуду можно представить на комплексной плоскости в виде вектора $\underline{I_m}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке, соответствующей заданному комплексному числу.

Длина вектора $\underline{I_m}$ равна его модулю I_m , а угол, который он составляет с вещественной осью, равен аргументу комплексного числа ψ_i .

Проекция этого вектора на вещественную ось равна вещественной части $\underline{I_m}$, а на мнимую ось – мнимой части $\underline{I_m}$.

Отметим, что эта проекция совпадает со значением гармонического сигнала в момент времени $t=0$.

Умножение комплексной амплитуды на вектор вращения означает ее поворот на угол ωt в положительном направлении, т.е., против часовой стрелки.

При расчете можно использовать не комплексную амплитуду, а комплекс действующего значения тока I , длина которого меньше длины $\underline{I_m}$ в $\sqrt{2}$.

Слайд 3. Существуют три формы записи комплексных чисел: показательная, алгебраическая и тригонометрическая.

Комплекс действующего значения тока:

– в показательной форме записи можно записать как $\underline{I} = I e^{j\psi_i}$

– в алгебраической форме записи он записывается в виде суммы вещественной I' и мнимой I'' частей: $\underline{I} = I' + jI''$

– в тригонометрической форме записи вещественная и мнимая часть записывается через модуль и аргумент: $\underline{I} = I \cos \psi_i + jI \sin \psi_i$

При переходе от показательной формы записи к алгебраической можно использовать следующие соотношения, вытекающие из прямоугольного треугольника:

– вещественная часть равна модулю, умноженному на косинус угла ψ_i

$$I' = I \cos \psi_i;$$

– мнимая часть равна модулю, умноженной на синус угла ψ_i

$$I'' = I \sin \psi_i.$$

А при переходе от алгебраической формы записи к показательной:

– модуль комплексного числа по теореме Пифагора равен корню квадратному из суммы квадратов вещественной и мнимой частей $I = \sqrt{(I')^2 + (I'')^2}$:

– аргумент комплексного числа равен арктангенсу отношения мнимой части к вещественной с учетом знака $\psi_i = \arctg \left(\frac{I''}{I'} \right)$.

Слайд 4. Рассмотрим основные арифметические операции над комплексными числами $\underline{I}_1 = I'_1 + jI''_1 = I_1 e^{j\psi_1}$ и $\underline{I}_2 = I'_2 + jI''_2 = I_2 e^{j\psi_2}$.

Умножение и деление комплексных чисел удобнее производить в показательной форме: $\underline{I}_1 \times \underline{I}_2 = I_1 \cdot I_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}$ и $\underline{I}_1 : \underline{I}_2 = I_1 : I_2 e^{j(\psi_1 - \psi_2)}$.

При этом модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения – сумме аргументов сомножителей с учетом знака.

Модуль частного равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент частного – разности аргументов делимого и делителя с учетом знака.

Сложение и вычитание комплексных чисел можно выполнять только в алгебраической форме, отдельно складывая или вычитая действительную и мнимую части:

$$\underline{I}_1 \pm \underline{I}_2 = (I'_1 \pm I'_2) + j(I''_1 \pm I''_2)$$

На комплексной плоскости векторы складываются по правилу параллелограмма.

При вычитании векторов вектор разности можно построить между концами векторов.

При умножении комплексной функции $\underline{I}_1$ на $j\omega$ выполняется операция ее дифференцирования.

На комплексной плоскости эта операция соответствует масштабированию вектора $\underline{I}_1$ и его повороту в положительную сторону на 90° .

При делении комплексной функции $\underline{I}_1$ на $(j\omega)$ выполняется операция ее интегрирования.

На комплексной плоскости эта операция соответствует масштабированию вектора $\underline{I}_1$ и его повороту в отрицательную сторону на -90° .

Слайд 5.

Применение комплексных чисел позволяет проводить расчет сложных линейных гармонических цепей в установившихся режимах более удобно без применения тригонометрических функций.

Метод комплексных амплитуд предполагает три этапа:

1) прямое преобразование: переход из области текущего времени t в область комплексной частоты $j\omega$;

2) составление для электрической цепи алгебраических уравнений электрического равновесия (по законам Кирхгофа) и параметрических уравнений (по законам Ома) в комплексной форме и их последующее решение;

3) при необходимости обратный переход из области комплексной частоты $j\omega$ в область текущего времени t .

Слайд 6

Рассмотрим применение метода комплексных амплитуд для ЭЦ с последовательно соединенными R, L и C элементами при прохождении через них гармонического тока $i(t) = I_m \sin \omega t$.

Как было показано ранее гармоническое напряжение $u(t)$ на зажимах этой цепи будет складываться из суммы мгновенных напряжений на каждом элементе и по закону Ома равно

$$u(t) = u_R + u_L + u_C = i \cdot R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Если представить сопротивление, индуктивность и емкость комплексными схемами замещения, а мгновенные значения тока i и напряжения u в комплексной форме, то получим комплексную схему замещения цепи.

Запишем для нее уравнение по закону Ома в комплексной форме.

Гармонические функции, входящие в выражение по закону Ома, можно представить в виде векторов и соответствующих им комплексных чисел как:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C.$$

В соответствии с правилами перехода от гармонической функции к ее комплексному представлению, получим:

- комплекс действующего значения напряжения на сопротивлении равным $R\underline{I}$;
- комплекс действующего значения напряжения на индуктивности равным $j\omega L\underline{I}$, так, как умножение вектора $\underline{I}$ на $j\omega$ соответствует операции дифференцирования.;
- комплекс действующего значения напряжения на емкости равным $-j\frac{1}{\omega C}\underline{I}$, так как умножение вектора $\underline{I}$ на $-j\omega$ соответствует операции интегрирования.

Вынесем за скобку комплекс действующего значения тока $\underline{I}$, тогда в скобках остаются величины, имеющие размерность сопротивления $= \underline{I} \left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right)$

Они называются комплексными сопротивлениями, входящих в цепь идеализированных элементов, и обозначаются заглавной буквой Z с подчеркиванием и с указанием соответствующего индекса:

$$= \underline{I}(\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C) = \underline{I}\underline{Z}$$

Сумма этих сопротивлений в комплексной форме получила название комплексное полное сопротивление цепи и обозначается заглавной буквой $\underline{Z}$ с подчеркиванием.

Полученное выражение $\underline{U} = \underline{I}\underline{Z}$ представляет собой закон Ома электрической цепи в комплексной форме.

Слайд 7.

Комплексное полное сопротивление цепи в общем случае – это комплексное число, поэтому оно может быть записано как в показательной форме записи, так и в алгебраической:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z e^{j\varphi}$$
$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C),$$

В этих выражениях:

R и X – вещественная и мнимая часть комплексного сопротивления цепи, причем последняя может быть как положительной, так и отрицательной;

Z – модуль комплекса полного сопротивления цепи;

φ – аргумент комплекса полного сопротивления цепи, равный сдвигу по фазе между напряжением и током на участке цепи $\varphi = \psi_u - \psi_i$, который может изменяться от 90° до -90° .

Сдвиг по фазе определяет характер сопротивления цепи:

- если $\varphi = 0^\circ$ – то характер сопротивления цепи чисто резистивный;
- если $\varphi = 90^\circ$ – то – индуктивный;
- если $\varphi = -90^\circ$ – то – емкостной;
- если $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ – то характер сопротивления цепи резистивно-индуктивный;
- если $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$ – то характер сопротивления цепи резистивно-емкостной.

Для Z может быть построен треугольник сопротивлений на комплексной плоскости.

Из этого треугольника следуют все соотношения при переходе от алгебраической формы записи к показательной и наоборот.

$$X = Z \sin \varphi, \quad R = Z \cos \varphi, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

Слайд 8.

На векторной диаграмме для комплексов действующих значений тока и напряжений на отдельных элементах ЭЦ все векторы выходят из нуля.

Ее целесообразно строить по результатам расчета электрической цепи с соблюдением масштабов всех величин.

Затем по ней находится векторная сумма напряжений на всех элементах и, если она совпадает с вектором входного напряжения, то это является проверкой правильности расчета. В этом случае говорят, что векторная диаграмма сходится.

Если результатов расчета нет, то построение качественной векторной диаграммы лучше начать с вектора тока I , произвольно выбрав его длину и направление.

Далее строим вектор $\underline{U}_R$ произвольной длины, но совпадающий по направлению с вектором тока.

Затем строим вектор $\underline{U}_L$ произвольной длины, но опережающий вектор тока на 90° .

И, наконец, строим вектор $\underline{U}_C$ произвольной длины, отстающий от вектора тока на 90° .

Векторная сумма $\underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$, равная входному напряжению $\underline{U}$ в данном случае опережает вектор тока на угол φ .

Следовательно, характер сопротивления цепи резистивно-индуктивный.

Слайд 9. Если в схеме более трех элементов, то удобнее строить *топографическую диаграмму*, на которой в отличие от векторной диаграммы векторы напряжения на элементах строятся строго по порядку их расположения на схеме.

Построение топографической диаграммы начинается с точки, потенциал которой принят за нуль. Каждый последующий вектор строится не из нуля, а из конца предыдущего вектора.

И тогда векторная сумма получается в результате соединения начала первого вектора и конца последнего.

Построим топографическую диаграмму напряжений и совмещенную с ней векторную диаграмму токов на основании ранее построенной векторной диаграммы.

Построение диаграммы начинается с вектора $\underline{U}_C$.

Затем из конца вектора $\underline{U}_C$ строится вектор $\underline{U}_L$ (пунктирная линия).

Из конца последнего вектора строится вектор $\underline{U}_R$.

Если соединить начало первого и конец последнего вектора, то получим вектор, соответствующий входному напряжению $\underline{U}$, который полностью совпадает с полученным ранее вектором на векторной диаграмме.

Слайд 10. Рассмотрим применение метода комплексных амплитуд для параллельного соединения идеализированных R, L и C элементов при подаче на ее вход гармонического напряжения $u(t) = U_m \sin \omega t$.

Гармонический ток i на входе цепи по 1 закону Кирхгофа будет складываться из алгебраической суммы мгновенных значений токов через каждый элемент:

$$i = \frac{U_m}{R} \sin \omega t + \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ) + \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Если представить сопротивление, индуктивность и емкость комплексными схемами замещения, а мгновенные значения напряжения u и тока i в комплексной форме, то получим комплексную схему замещения цепи.

Запишем для нее уравнение по 1 закону Кирхгофа в комплексной форме как:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{j\omega L} + \frac{\underline{U}}{1/j\omega C}.$$

Вынесем за скобку комплекс действующего значения напряжения $\underline{U}$, тогда в скобках остаются величины, имеющие размерность проводимости

$$= \underline{U} \left(\frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C \right).$$

Они называются комплексными проводимостями, входящих в цепь идеализированных элементов, и обозначаются заглавной буквой Y с подчеркиванием и с указанием соответствующего индекса: $= \underline{U}(\underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C)$

Сумма этих проводимостей в комплексной форме $\underline{Y}_R, \underline{Y}_L, \underline{Y}_C$ получила название комплексная полная проводимость цепи и обозначается заглавной буквой $\underline{Y}$ с подчеркиванием $= \underline{UY}$.

Полученное выражение $\underline{I} = \underline{UY}$ представляет собой закон Ома в комплексной форме.

Слайд 11.

Комплексная проводимость цепи в общем случае комплексное число, поэтому она может быть записана как в показательной форме записи, так и в алгебраической:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{j\psi_i}}{U e^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} e^{j(\psi_i - \psi_u)} = Y e^{-j\varphi} \quad \underline{Y} = G - jB = G - j(B_L - B_C),$$

В этих выражениях:

Y – модуль комплексной проводимости цепи;

φ – аргумент комплексной проводимости цепи, равный сдвигу по фазе между напряжением и током на участке цепи $\varphi = \psi_u - \psi_i$, который может изменяться от 90° до -90° ;

G и B – вещественная и мнимая часть комплексной проводимости цепи, которая может быть как положительной, так и отрицательной.

Для $\underline{Y}$ может быть построен треугольник проводимостей на комплексной плоскости.

Из этого треугольника следуют все соотношения для комплексной проводимости при переходе от алгебраической формы записи к показательной и наоборот.

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G} \quad B = Y \sin \varphi \quad G = Y \cos \varphi,$$

Слайд 12. Построение качественной векторной диаграммы для параллельного соединения идеализированных R, L и C элементов лучше начать с вектора напряжения $\underline{U}$, выбрав его длину и направление произвольно.

Далее строим вектор $\underline{I}_R$ произвольной длины, но совпадающий по направлению с вектором напряжения.

Затем строим вектор $\underline{I}_C$ произвольной длины, опережающий вектор напряжения на 90° .

И, наконец, строим вектор $\underline{I}_L$ произвольной длины, отстающий от вектора напряжения на 90° .

Векторная сумма $\underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$, равная входному току $\underline{I}$, в данном случае опережает вектор напряжения на угол φ . Следовательно, характер сопротивления цепи резистивно-емкостной.

Слайд 13. Из рассмотренных примеров применения метода комплексных амплитуд следует, что для гармонических сигналов законы Кирхгофа выполняются только в комплексной форме.

Первый закон Кирхгофа выполняется для любого узла электрической цепи и гласит, что сумма комплексных амплитуд токов всех ветвей, подключенных к узлу, будет равна нулю. Аналитически этот закон можно записать как

$$\sum_k \underline{I}_{m_k} = 0.$$

Второй закон Кирхгофа выполняется для любого контура электрической цепи и гласит, что сумма комплексных амплитуд напряжений на всех пассивных элементах, входящих в контур, будет равна сумме комплексных амплитуд ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_k \underline{U}_{m_k} = \sum_k \underline{E}_{m_k}$$

При этом следует иметь в виду, что для модулей комплексных действующих значений токов и напряжений законы Кирхгофа не выполняются!

Слайд 13. Спасибо за внимание!